UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

DISSERTAÇÃO

NÚMEROS NATURAIS E SUBTRACÇÃO: um estudo no 1.º ciclo

Fátima de Jesus Carvalho Gonçalves

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialização em Didáctica da Matemática

2011

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

NÚMEROS NATURAIS E SUBTRACÇÃO:
um estudo no 1.º ciclo

Fátima de Jesus Carvalho Gonçalves

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialização em Didáctica da Matemática

Dissertação orientada pela Profª. Doutora Joana Brocardo e

Co-orientada pelo Prof. Doutor João Pedro Ponte

2011

Pela alegria de ser mãe...

Dedico este trabalho ao André e à Inês!

Resumo

Este estudo pretende analisar as ideias e procedimentos numéricos que os alunos, do 1.º ciclo, usam na resolução de problemas associados à operação subtracção e ao conhecimento dos números e o modo como eles evoluem.

A fundamentação teórica incide em dois tópicos: Números e operações e Sentido de número. No primeiro, aprofundo alguns aspectos relativos à investigação sobre as operações com números naturais, concretamente relacionadas com o ensino/aprendizagem dos números e operações e estratégias de cálculo associadas às operações adição e subtracção com números-dígito e números multidígitos. No segundo, discuto alguns aspectos estruturantes relacionados com o sentido de número, em particular, o seu significado, o modo como o conceito é abordado no currículo e os aspectos a ter em conta no seu desenvolvimento, nomeadamente: o cálculo mental, os algoritmos e o papel do professor.

O estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa. A recolha de dados decorreu entre Dezembro de 2008 e Janeiro de 2009, com a realização de entrevistas clínicas, pela investigadora, a dezoito alunos do 1.º ciclo (seis do 2.º ano, seis do 3.º ano e seis do 4.º ano). Os dados recolhidos são de natureza descritiva. Incluem produções escritas dos alunos relativas às tarefas propostas, registos áudio das entrevistas de tipo clínico e notas de campo resultantes da observação das mesmas.

Os resultados do estudo permitem identificar, na resolução de problemas que envolvem subtracção, as seguintes estratégias de cálculo usadas pelos alunos: (i) *contar*, (ii) *saltar*, (iii) *decompor*, (iv) *cálculo relacional*, (v) *usar factos conhecidos* e (vi) *algoritmo*. Identificam-se, também, formas globais de relacionar e decompor os números: *conhecimento sequencial dos números, conhecimento sequencial usando saltos de 10, conhecimento de* *estruturas de decomposição decimal dos números, factos conhecidos* e *algoritmo*. É feita a análise de como evoluem os alunos a respeito de conhecimento dos números e os erros que cometem.

Os resultados do estudo permitem concluir que: (1) no uso de estratégias de subtracção é evidente a existência de dois pólos extremos: por um lado o uso da estratégia *contar,* por outro, o uso do *algoritmo*. As estratégias de nível intermédio de "sofisticação" como o *saltar, decompor* e *uso de factos conhecidos* são pouco usadas; (2) nas questões associadas ao conhecimento dos números o uso de estratégias progressivamente mais "sofisticadas" parece estar relacionado com a progressão dos alunos por ano de escolaridade.

Finalmente, este estudo reforça a ideia de que a introdução precoce dos algoritmos inibe a compreensão de um conjunto de relações entre os números e as operações associada ao desenvolvimento do sentido de número. Pelo que, se evidencia a importância das propostas de ensino dos professores contemplarem a prática de estratégias de cálculo mental de nível intermédio no ensino/aprendizagem da subtracção.

Palavras-chave: estratégias de cálculo, subtracção, conhecimento dos números, sentido de número

Abstract

This study aims to examine the ideas and numerical procedures that students of Primary School use in solving problems associated with the subtraction operation and the knowledge of numbers they have and how they evolve.

The theoretical framework of the study focuses on two topics: Numbers and operations and Number sense. In the first section I discuss some aspects of research operations with natural numbers, specifically related to the teaching and learning of numbers and operations and calculation strategies associated to numbers-digit and multidigit numbers addition and subtraction. In the second section, I discuss some aspects related to structuring the number sense, in particular, its meaning, how the concept is approached in the curriculum and the aspects taken into account in its development, namely: mental calculation, algorithms and the teacher's role.

The study follows a qualitative research approach. Data collection took place between December 2008 and January 2009 with the completion of clinical interviews, by the researcher, to eighteen students from Primary School (six from 2^{nd} grade, six from 3^{rd} grade and six from 4^{th} grade). The data collected are descriptive. They include students' written production on the proposed tasks, audio recordings of interviews of clinical type and field notes resulting from the observation of the same.

The study results allow me to identify, in solving problems involving subtraction, the following calculation strategies used by students: (i) *counting*, (ii) *jumping* (iii) *decomposition*, (iv) *relational calculus*, (v) *known facts* and (vi) *algorithm*. It also identifies global ways of relating and decompose numbers: *knowledge of sequential numbers, knowledge of sequential jumps of 10, knowledge of structures of decimal decomposition of* *numbers, known facts* and *algorithm*. An analysis of how students evolve, regarding the knowledge of numbers and mistakes they make, is accomplished.

The study results show that: (1) in the use of strategies for subtraction it is clear that there are two extremes, in one hund the use of the counting strategies and in the other hand the use of algorithm. The strategies of intermediate level of "sophistication" as *jumping* , *decomposing* and *known facts* are not much used; (2) in issues related to knowledge of the numbers, the use of strategies progressively more "sophisticated" seems to be in connection with the progress of pupils per school year.

Finally, this study strengthens the idea that the early introduction of algorithms inhibits the understanding of a set of relationships between numbers and operations associated with the development of number sense. Therefore, it highlights the importance of teachers' education proposals to contemplate the practice of mental calculation strategies in middle-level teaching and learning of subtraction.

Key words: strategies calculation, subtraction, number knowledge, number sense

Agradecimentos

O meu agradecimento profundo e sincero à minha orientadora, Profª. Doutora Joana Brocardo, por toda uma sucessão de incentivos, "empurrões" e algumas coisas mais, não esquecendo o apoio incondicional durante a concretização deste trabalho. A sua capacidade crítica foi fundamental para mim em diversos momentos, tal como o respeito pelo meu ritmo de trabalho, nem sempre o mais desejável. Obrigada pela paciência Joana.

Ao Co-orientador, Professor Doutor João Pedro, obrigada pela tolerância.

Ao Jean-Marie um obrigado muito especial pela boa vontade e disponibilização dos materiais, não esquecendo a sua disponibilidade pessoal sempre que vinha a Portugal, para esclarecer algumas dúvidas que me surgiam.

Às professoras Vitalina, Susa e Arminda, obrigada pela colaboração.

À Fátima pelo incentivo e disponibilidade sempre que eu solicitava apoio, o meu obrigado.

A todos os colegas e coordenadoras que fizeram parte da equipa do programa de formação continua da ESE de Setúbal, enquanto durou este trabalho, obrigada por todo o apoio em momentos particularmente difíceis para mim.

Ao André e à Inês, um pedido de desculpas por não terem a mãe tão presente como gostariam e eventualmente precisariam. Um agradecimento do fundo do coração pela sua compreensão. Em especial ao André pela ajuda nas traduções dos artigos em inglês e todas as *outras coisas*.

Aos meus pais, incondicionalmente sempre disponíveis, pelas palavras de estímulo e pelo incentivo a prosseguir este trabalho. Tenho que lhes agradecer também a disponibilidade que sempre demonstraram para me substituir nas tarefas rotineiras para com os meus filhos. OBRIGADA...

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Gráficos

1. Introdução

Nos últimos anos, tenho estado ligada, profissionalmente, a uma instituição de ensino superior, desempenhando funções de formadora no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (PFCM). Neste contexto, em conjunto com a equipa de professores com quem trabalho, de que fazem parte professores do 1.º ciclo, 2.º ciclo e do ensino superior politécnico, tive oportunidade de aprofundar alguns aspectos relacionados com o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1.º ciclo do ensino básico.

Enquanto formadora no PFCM tive a possibilidade de confirmar a importância da intencionalidade de todo o trabalho do professor, tanto a nível da planificação das suas aulas como no que diz respeito à sua condução e reflexão posterior, no sentido da promoção de aprendizagens significativas dos seus alunos.

O modo como o professor deve planificar, tendo em conta as aprendizagens diferenciadas de cada aluno já fazia parte das minhas preocupações, enquanto professora do 3.º ciclo e ensino secundário. Aquando da minha iniciação como formadora no PFCM, constatei que esta problemática já se coloca desde os primeiros anos de escolaridade. Para que os alunos progridam nas aprendizagens, o professor, para além de planificar conteúdos, precisa igualmente de ter uma ideia clara do que os alunos sabem, tendo sempre como propósito a sua progressão na aprendizagem e o desenvolvimento do seu pensamento de modo estruturado. Para tal, impõe-se que o professor diagnostique, primeiro, as ideias e procedimentos que os alunos usam na resolução de tarefas, percebendo os conhecimentos e estratégias que conhecem e usam.

Associa-se a este aspecto uma conjuntura de mudança no que se refere à Educação Matemática no Ensino Básico, que privilegia o ensino/aprendizagem dos números e operações com compreensão. Por exemplo, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, um documento internacional de referência, referem que: "O ensino efectivo da matemática requer compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, (...) e apoio para que o aprendam correctamente" (NCTM, 2007, p. 17). Neste sentido, o professor precisa de compreender a forma como os alunos aprendem e o que sabem para definir um percurso de ensino que lhes possa proporcionar aprendizagens significativas. Este documento destaca, ainda que, "a compreensão dos números e das operações e o desenvolvimento do sentido de número constituem o cerne da educação matemática para os primeiros anos do ensino básico" (NCTM, 2007, p.34).

Em Portugal, vive-se a generalização do novo Programa do Ensino Básico (ME, 2007) desde o ano lectivo de 2010/11. Este novo programa, quando comparado com os anteriores, apresenta uma nova perspectiva para o ensino dos números e operações, associada explicitamente, ao desenvolvimento do sentido de número. Relativamente ao tema Números e Operações destacam-se três ideias fundamentais: "promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo" (ME, 2007). Reforça também esta ideia, o "Propósito principal de ensino" [do tema Números e Operações] quando refere: "Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações" (...) (ME, 2007, p. 13).

De um modo geral, estas novas perspectivas de ensino dos números conjugadas com a minha experiência de observação das práticas dos professores envolvidos no PFCM, onde tive a oportunidade de experienciar formas de perceber o que o aluno sabia e tentar levá-lo à compreensão de determinado conceito ou ideia, justificam o meu interesse em aprofundar a temática associada ao desenvolvimento do sentido de número, em particular nos primeiros anos de escolaridade, enquadrada no tema "Números e operações".

1.1. Problema, objectivos e questões do estudo

É importante ter dados empíricos que ajudem a definir uma tendência de desenvolvimento que possa servir de referência para planificar a aprendizagem. Tendo como pano de fundo esta ideia central, proponho-me realizar um estudo que analisa as ideias e procedimentos numéricos que os alunos do 1.º ciclo, usam na resolução de problemas e o modo como eles evoluem. Neste âmbito pretendo compreender quais os conhecimentos, que os alunos têm sobre os números, e quais as estratégias que usam na resolução de problemas que envolvem a operação subtracção. A partir daí, tenho como propósito analisar a progressão dos conhecimentos numéricos dos alunos numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número.

A ideia chave deste estudo é avaliar e diagnosticar o que os alunos sabem para perspectivar o ensino/aprendizagem. Neste sentido, a interacção entre a avaliação e o diagnóstico servem para recolher informação que permite, ao professor, perspectivar a aprendizagem dos alunos e a sua progressão. Na planificação é importante que o professor consiga antecipar a forma como os alunos concretizam as tarefas propostas de acordo com o seu nível de competência, tendo em vista a progressão da sua aprendizagem. Esta ideia é defendida por Kraemer (2008, p. 28) no seu quarto princípio para planificar.

Adoptando este entendimento, a ideia de que o professor precisa diagnosticar o que o aluno sabe e como pensa para, a partir daí, planificar a sua proposta de ensino, ganha força. É importante que o professor crie uma sequência de oportunidades de aprendizagem, ancorada na forma de pensar dos alunos, no que sabem e na sua progressão (Dolk, 2008).

Assim, defino como grande questão do estudo: Qual o conhecimento que os alunos do 1.º ciclo têm sobre os números e operações?

Mais especificamente, pretendo responder às seguintes questões:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos e que tipo de erros cometem na resolução de problemas que envolvem subtracção e como evoluem essas estratégias ao longo do 2.º, 3.º e 4.º anos?

-Que conhecimentos têm os alunos sobre os números e como evoluem ao longo do 2.º, 3.º e 4.º anos?

- Quais as transformações sucessivas das ideias e procedimentos dos alunos, quando passam de um nível de raciocínio e de cálculo a outro?

1.2. Organização do estudo

Esta dissertação está organizada em seis capítulos que incluem a fundamentação teórica, a metodologia, a análise de dados e as conclusões do estudo. O primeiro capítulo corresponde à introdução, onde são explicitados o problema, os objectivos e as questões do estudo, e, apresentada a organização do trabalho.

A fundamentação teórica engloba o segundo e o terceiro capítulo. No segundo capítulo - Números e operações - aprofundo alguns aspectos relativos à investigação sobre as operações com números naturais, concretamente relacionadas com o seu ensino-aprendizagem e estratégias de cálculo associadas às operações adição e subtracção com números-dígito e com números multidígitos. No terceiro capítulo - Sentido de número - discuto alguns aspectos estruturantes relacionados com o sentido de número, nomeadamente, o seu significado, o modo como o conceito é abordado no currículo e os aspectos a ter em conta no seu desenvolvimento, nomeadamente: o cálculo mental, os algoritmos e o papel do professor.

O quarto capítulo corresponde à apresentação da metodologia seguida no estudo. Descrevo as opções metodológicas gerais, a organização da recolha de dados, a selecção dos participantes e a descrição das entrevistas. Em relação às entrevistas apresento a sua fundamentação geral, descrevo como é feita a selecção das questões que as integram e como são realizadas. Ainda neste capítulo, apresento o modo como os dados são analisados.

O quinto capítulo diz respeito à análise de dados, onde apresento e analiso os dados recolhidos. Começo por identificar e descrever as estratégias que os alunos usam para resolver problemas de subtracção, de seguida analiso as estratégias que usam à medida que evoluem no nível de desempenho. É feita a mesma sequência de análise para as questões associadas ao conhecimento dos números.

Finalmente, no sexto capítulo apresento as principais conclusões do estudo e termino com a discussão de algumas implicações para o ensino/aprendizagem da matemática e uma pequena reflexão pessoal.

2. Números e operações

O tema Números e Operações está presente em todos os ciclos e assume particular relevância no 1.º, em que tem um peso de cerca de 60% do respectivo quadro temático no Programa de Matemática do Ensino Básico. Tendo em conta que é o tema das tarefas que utilizei na recolha de dados do estudo, aprofundo neste capítulo alguns aspectos relativos à investigação sobre as operações com números naturais. De uma forma geral, foco-me em estudos que incidem nos alunos e na compreensão dos aspectos associados aos Números e Operações. Neste domínio tento discutir quais as estratégias que podem ser usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de adição e subtracção bem como, realçar aspectos relacionados com o ensino e a aprendizagem destas operações no desenvolvimento do sentido de número.

2.1. Ensino-Aprendizagem dos Números e Operações

O número de investigações relacionadas com o tema Números e Operações está de acordo com a sua importância no currículo de Matemática na maioria dos países. Há muito que existe a preocupação de investigar o modo como os alunos compreendem os conceitos associados aos números e às operações e que procedimentos usam na resolução de tarefas numéricas. Até à década de 90, essas investigações versavam sobre alunos ou grupos de alunos, fora do contexto da sala de aula. O propósito desses estudos era compreender os conceitos numéricos e a competência das crianças na resolução de problemas numéricos (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007).

A partir dos anos 90, o contexto das investigações relacionadas com os números e as operações passou a ser a turma ou pequenos grupos de alunos em interacção. Alguns autores apontam como razões para essa mudança metodológica as alterações no quadro teórico, considerando que a forma como as crianças pensam e aprendem Matemática é fortemente influenciada por contextos sociais e culturais bastante complexos (teorias socioconstrutivistas e socioculturais), e ainda, a mudança do foco das investigações. Cada vez mais as investigações têm como finalidade a construção, implementação e avaliação de currículos, de programas e de conjuntos de tarefas de ensino e aprendizagem de um determinado tema e, por isso, torna-se importante o contexto de sala de aula (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Segundo estes autores, a mudança deu-se tanto ao nível da psicologia educacional como ao nível da educação matemática.

Na educação matemática, no início da década de 90, investigadores como Freudenthal, Rouche e Wittmann, defendem os estudos centrados na sala de aula como o principal tipo de investigação a realizar. Wittmann (1998) refere mesmo que o objectivo da investigação em educação matemática é construir conjuntos de unidades de ensino e investigar os seus efeitos nas diferentes comunidades educacionais.

De uma forma geral, as principais linhas de investigação dos estudos desenvolvidos em sala de aula associados à temática dos números e operações relacionam-se com:

> A aprendizagem da aritmética como resolução de problemas, o ensino da aritmética inerentemente algébrica, a construção de uma cultura de sala de aula socioconstrutivista, o uso de modelos emergentes como um *design* heurístico, o ensino de problemas de palavras numa perspectiva de modelação e a mudança do conhecimento e das concepções dos professores. (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, p. 559).

Seguindo a linha de investigação centrada na aprendizagem da aritmética a partir da resolução de problemas, Fuson (2003) refere que, começar a aprendizagem dos números e operações com situações-problema leva a uma maior capacidade de resolver problemas e a uma maior facilidade em modelar directamente soluções para esses problemas, por parte dos alunos, permitindo-lhes avançar para abordagens matemáticas mais complexas, à medida que evoluem para situações-problema também mais complexos. Deste modo, tratando-se de situações de ensino em sala de aula, fomenta-se o desenvolvimento da fluência de cálculo, em alternância com a resolução de problemas, partindo de situações e problemas reais e escritos. Neste sentido, as experiências vividas que os alunos relatam na sala de aula constituem contextos facilitadores do alcance de significados matemáticos. A autora realça, também, a importância do tempo que deve ser destinado ao desenvolvimento da compreensão dos métodos e estratégias usados pelos alunos, de modo a tornar a sua aprendizagem significativa e duradoura.

A revisão da literatura realizada por Verschaffel, Greer e De Corte (2007) identifica estudos que incidem, sobretudo, no progresso das crianças no que diz respeito às estratégias utilizadas quando resolvem problemas de adição e subtracção, distinguindo investigações que envolvem apenas números com um único dígito (números-dígito) das realizadas com números maiores, os números multidígitos. Considerando, ainda, a estreita relação entre as operações adição e subtracção, muitos dos estudos realizados incidem, também, sobre aspectos associados a estas duas operações. Assumo tais estudos como referência no início da próxima secção, relativa a estratégias de cálculo associadas às operações adição e subtracção.

2.2. Adição e Subtracção - Estratégias de cálculo

O tópico adição e subtracção ocupa uma posição central no currículo de matemática no 1.º ciclo, em especial, no 1.º e 2.º ano de escolaridade. Considerando que as operações adição e subtracção estão interligadas centro a discussão nas investigações que preconizam diferentes estratégias de resolução de problemas referentes a estas operações. De referir que, nos estudos associados às operações aritméticas, o universo numérico considerado é o conjunto dos números naturais incluindo o zero, ou seja, o conjunto de referência é N_0. Neste ponto, começo por caracterizar os sentidos associados às respectivas operações. A seguir, refiro os aspectos relacionados com o cálculo com números-dígito e números multdígitos em paralelo com uma abordagem às estratégias de contagem e de cálculo com números menores que vinte e entre vinte e cem. Finalmente, apresento estratégias usadas na resolução de problemas de adição e subtracção.

É importante que os alunos estabeleçam e compreendam determinadas relações numéricas de modo a desenvolverem uma compreensão significativa das primeiras operações aritméticas. Estas relações vão-se estabelecendo a partir da exploração de processos de contagem associados a diferentes possibilidades de estruturar e relacionar números, integrando tanto a sua compreensão como a memorização de factos básicos.

Um dos aspectos importantes que envolve as operações adição e subtracção é a identificação de situações que caracterizam o sentido das operações. A proposta de classificação desse tipo de situações de Fuson (2003), embora com algumas diferenças na terminologia usada, é referida por vários autores. Fuson considera, num nível elementar, para a adição, "adicionar até" e para a subtracção "retirar de". Num nível seguinte o "combinar" envolvendo situações com significado de "juntar" e de "decompor"e por fim, o sentido de "comparar". As situações de comparação têm um carácter aditivo ou subtractivo dependendo da linguagem utilizada na frase comparativa. A expressão "*a mais*" sugere adição e a expressão "*a menos*" sugere subtracção.

Inicialmente, a linguagem dos problemas que envolvem comparação de quantidades (sentido "comparar"), é de difícil compreensão por parte das crianças, uma vez que é preciso também interpretar a língua em que são expressas. Contudo, Fuson (2003) defende que até as crianças do pré-escolar podem resolver problemas deste tipo, desde que seja usado material manipulável para modelar as situações. Sustenta que a abordagem mais eficaz para resolver problemas é a compreensão da situação proposta no problema, sendo este método usado naturalmente pelas crianças pequenas.

2.2.1. Adição e subtracção com números-dígito

As investigações associadas às operações adição e subtracção com números-dígito incidem na evolução do uso de estratégias, pelas crianças, partindo das estratégias associadas à contagem de objectos, à utilização de materiais manipuláveis e recorrendo aos dedos até à utilização de outras relacionadas com a formalização da operação.

Segundo Fuson et al. (1997a) a conceptualização matemática de uma situação para uma criança, corresponde a uma interpretação mental do mundo que a rodeia. Ou seja, a um nível elementar as crianças são capazes de construir situações de adição usando objectos físicos de vários tipos, para modelar a operação, que encaram como a junção de unidades simples e vêem apenas uma representação de cada vez, seja a correspondente a uma das parcelas ou à soma. Isto tem efeitos nos procedimentos que usam. Os procedimentos associados a este nível são denominados por *contar tudo*, pois as crianças começam a contagem num dos conjuntos de objectos ou na sua representação e contam tudo a partir do um, usando o mesmo procedimento para todos os conjuntos, contando deste modo até chegar ao total. Para subtrair, embora os processos não sejam tão explícitos, as crianças partem do total de objectos, retiram alguns e contam os objectos restantes para obter a diferença.

Num nível seguinte, as crianças podem ver e representar as três quantidades (correspondentes às parcelas e à soma) enquanto entidades relacionadas entre si, considerando os objectos que as constituem como parte, simultaneamente, das parcelas e do total. Isto permite a aplicação de métodos de contagem mais abreviados e eficientes. Os procedimentos associados a este nível são denominados por *contagem a partir de*, pois a criança parte da contagem de uma das quantidades e continua a partir daí, até chegar ao total.

Em situações de subtracção, as crianças podem, de acordo com a situação, partir do total de objectos, retirar alguns e contar os objectos restantes para obter a diferença. Os processos a usar podem ser contagens decrescentes (*contar para trás*), partindo do aditivo para chegar ao subtractivo, ou partindo do aditivo para chegar ao resto. Outro método considerado mais fácil é *contar até*, partindo do subtractivo para chegar ao ao aditivo.

No nível mais elevado, as crianças criam estruturas que lhes permitem construir, simultaneamente, representações mentais dos números e da soma. Neste nível, as parcelas são vistas separadamente da soma e podem ser comparadas com ela: "Os números são encarados como unidades que incluem tríades numéricas - duas parcelas e uma soma conhecidas" (Sherian & Fuson, 2005, p. 351). Assim, as crianças são capazes de transformar uma adição noutra recompondo os números, de forma a usar números conhecidos ou a recorrer a factos conhecidos associados à operação envolvida. Por exemplo, podem recorrer às composições dos números usando a estrutura 5, para calcular 7+2, calculando 5+4; ou podem usar a estrutura 10, para calcular 9+3, calculando 10+2. Podem também, recorrer ao uso dos dobros para calcular 3+4, calculando 3+3+1. As estratégias associadas a este nível são denominadas por *factos conhecidos* e *factos derivados* (Fuson, 1992). Fuson (2003) refere ainda que, no final do primeiro ano, os alunos deveriam progredir nos métodos associados tanto à adição como à subtracção com números com um dígito, usando estratégias rápidas e apropriadas, sobretudo as relacionadas com a *contagem a partir de* e a *contagem até*.

Verschaffel, Greer e De Corte (2007) realçam que, no que diz respeito às competências de cálculo com números com um dígito, o trabalho a fazer envolve alguma diversidade de aspectos relacionados com a aritmética. Nomeadamente, perceber a forma como as crianças desenvolvem a compreensão sobre as operações e a sua evolução na utilização de métodos de cálculo cada vez mais eficientes, ao mesmo tempo que seleccionam as estratégias a utilizar consoante os números envolvidos. Em suma, é importante contribuir para desenvolver um conjunto de competências numéricas associadas à subtracção, que permite aos alunos resolver todo o tipo de situações subtractivas envolvendo números-dígito, antes de terem conhecimento do algoritmo. Tal como refere Beishuizen (2003), todo um trabalho baseado nos números e nas suas relações ajuda mais os alunos na sua compreensão do que a introdução prematura dos algoritmos.

2.2.2. Adição e subtracção com números multidígitos

Muitas das investigações realizadas no âmbito das operações com números multidígitos relacionam as estruturas conceptuais sobre os números multidígitos e o modo como essas estruturas são mobilizadas na invenção e utilização de estratégias de resolução de problemas associados às operações adição e subtracção. Esta interligação é evidenciada por vários autores, entre eles, Fuson (2003a), Wearne (1996) e Verschaffel et al. (2007).

Por exemplo, Hiebert & Wearne (1996) realizaram um estudo com crianças do primeiro ciclo do ensino básico, onde analisaram o seu conhecimento conceptual e procedimental no que diz respeito à adição e subtracção, identificando uma estreita relação entre eles. Pelo seu lado, Fuson (2003) refere que o conhecimento procedimental e o conhecimento conceptual se intercalam continuamente e facilitam potencialmente um ao outro, aspectos que se fundem, normalmente, em processos individuais de resolução. Tentativas para distingui-los podem nem sempre ser úteis, dado que "fazer" e "compreender" estão interligados.

No primeiro ano, os alunos aprendem a sequência numérica, pelo menos até ao número vinte, através da contagem de objectos e criam as bases conceptuais necessárias às operações adição e subtracção. Contudo, a aquisição de um cálculo "inteligente" que conduz à automatização e à memorização destas operações, no universo dos números considerado, não pode ficar pelo nível de contagem. É assim necessário, introduzir alguma estruturação na contagem da sequência dos números. Esta pode ser estimulada por exemplo, pela escolha de contextos facilitadores que permitam aos alunos ordenar, agrupar e estruturar e pela organização de actividades que estimulem a formação de pares (contagem dois a dois) e a ordenação de grupos de cinco com a ajuda de materiais estruturados (por exemplo o fio de contas). É igualmente importante ter em conta a existência dos níveis de cálculo para que se possa ajudar os alunos a percorrê-los de forma evolutiva (Treffers e Buys, 2001). Estes autores consideram três níveis de cálculo que orientam a aprendizagem dos números e operações e que se vão desenvolvendo desde o pré-escolar: *Cálculo por contagem*; *Cálculo por estruturação* e *Cálculo formal* (Treffers e Buys, 2001).

O *Cálculo por contagem* apoiado ou não em materiais que permitem a contagem, corresponde ao primeiro nível da adição e subtracção. Inicialmente, os alunos tendem a resolver os problemas recorrendo à contagem apoiando-se nos dedos das mãos, o que pode ser efectuado de diferentes maneiras, nomeadamente, em situações de subtracção. Por exemplo, o aluno para efectuar 10-4 pode fazê-lo levantando 10 dedos (mostrar as duas mãos), baixar 4 e contar os que restam, um processo que se revela eficaz; ou realizar contagens decrescentes e aqui podem surgir duas situações: começarem a contar de 10 para trás e sentirem-se perdidos, não sabendo onde parar "10, 9, 8, e..." ou contar 4 para trás a partir do 10 e responder "dá 7" (10-9-8-7) e a resposta correcta é 4. Ou seja, a contagem decrescente pode revelar-se tarefa complicada. São situações como estas que, na tentativa de facilitar a transição para um nível de cálculo mais estruturado, devem ser ligadas a estratégias mais vantajosas a longo prazo e para números de ordens de grandeza mais elevadas

No *Cálculo por estruturação*, os alunos não recorrem à contagem, e, com o apoio de modelos adequados podem recorrer à decomposição do número ou fazer grupos de 5. No exemplo anterior, o aluno pode recorrer à decomposição do 10 em 6+4 e fica 6+4-4, de onde pode responder de imediato "fica 6". Ou usar a estrutura 5 na composição do 10 e tem 5+5-4, do 5 tira 4 e fica 1 (porque 4+1=5) que junta com o outro 5 e dá 6. Com números de ordem de grandeza mais elevada, por exemplo, nos números até 100 podem usar a estrutura 10 nas composições. Todos estes procedimentos podem ser acompanhados com material manipulável adequado que possibilitam a formação de grupos. Por isso, como referem Dolk e Fosnot (2001) usar materiais intencionalmente concebidos para facilitar agrupamentos de 5 e/ou 10 como o ábaco horizontal ou o colar de contas pode apoiar a transição dos alunos para o cálculo estruturado.

Ao nível do *Cálculo formal* os alunos já não precisam de apoio na visualização da contagem. O mundo dos números tornou-se suficientemente familiar para que possam utilizar os números como objectos mentais para atingir competências de cálculo inteligentes e flexíveis, sem necessidade de recorrer a materiais estruturados. Ao longo do processo de transição de níveis os alunos memorizaram um número significativo de factos básicos que poderão usar na resolução de problemas e exploração de estratégias e propriedades dos números e operações.

O objectivo de planear um percurso de ensino/aprendizagem dos números e operações, que permite ao aluno percorrer os diferentes níveis de cálculo, consiste em desenvolver estratégias de cálculo eficazes a partir das relações entre os números e as operações, usando as suas propriedades. Para além da categorização das estratégias usadas pelos alunos coloca-se também a questão do modo como elas surgem e do seu papel na compreensão dos conceitos e procedimentos associados às operações adição e subtracção.

Carpenter, Fennema, Peterson e Franke (1998) no desenvolvimento do projecto *Cognitively Guided Instruction* (projecto CGI), realizaram pesquisas centradas na construção de estratégias inventadas pelas crianças para adicionar e subtrair números com vários algarismos (números multidígitos). O objectivo principal consistia em investigar o papel que as estratégias inventadas podem desempenhar na compreensão dos conceitos e dos procedimentos de adição e subtracção com números multidígitos. Estes autores, Carpenter et al. (1998), desenvolveram um estudo longitudinal, ao longo de três anos, que envolveu 82 crianças do 1.º ao 3.º ano, cujo propósito foi investigar o papel das estratégias inventadas pelas crianças na compreensão dos conceitos e procedimentos de adição e subtracção com números multidígitos. Carpenter (1998) clarifica que as "estratégias inventadas" são estratégias não ensinadas que os alunos usam para resolver problemas de adição e subtracção com vários algarismos, sem recurso a materiais físicos. Esclarece também, que as crianças envolvidas no estudo referido não inventaram as estratégias no "vazio" e individualmente, nem era isso que se pretendia. Elas foram construídas num contexto social de sala de aula, onde houve partilha e discussão das estratégias inventadas pelos vários alunos. Apesar de as crianças apresentarem, fundamentarem e compararem as suas estratégias com as dos colegas, nenhum dos professores das turmas envolvidas, deliberadamente, tentou ensinar essas estratégias.

No estudo foram usadas como ponto de partida, as categorias definidas por Fuson et al. (1997a) para as estratégias inventadas pelas crianças na resolução de problemas de adição e subtracção: *decomposição em dezenas e unidades, sequencial* e *compensação.* Estes autores, à semelhança de Fuson (1992), Fuson et al. (1997a; 1997b) referem que, frequentemente, as estratégias inventadas pelas crianças estão interligadas com as concepções que estas têm sobre os números e as suas relações. Assim, a estratégia sequencial está relacionada com uma concepção de posição na sequência numérica, a estratégia de decomposição com a estrutura do sistema decimal e a estratégia de compensação com uma concepção que relaciona e interliga as concepções anteriores. No decorrer do estudo foram identificadas as seguintes estratégias: modelação ou contagem um a um, modelação usando materiais estruturados em dezenas e unidades, estratégias sequenciais (ou de saltos), estratégias de combinação de unidades, estratégias de compensação, outras estratégias inventadas e algoritmos.

Outras investigações tiveram como propósito distinguir e identificar as estratégias inventadas e usadas pelas crianças na adição e subtracção quando os números envolvidos são até 20 e entre 20 e 100 (Carpenter e Moser, 1984, Thompson, 1995, 1997, 1999). As estratégias usadas na resolução de problemas de adição e subtracção são categorizadas por vários autores de diferentes formas. Thompson (1995), nos números até 20, identifica categorias para a adição e subtracção separadamente e em algumas situações toma como ponto de partida categorias identificadas por outros autores. No domínio dos números entre 20 e 100 a categorização é comum para as duas operações.

Em relação aos números até 20, Carpenter e Moser, citados por Thompson (1999), identificam estratégias de cálculo usadas pelas crianças quando resolvem problemas de adição: *Contar tudo*, quando as crianças resolvem adições simples como 7+12, contando sete objectos (ou dedos) seguido de outros doze objectos, encontrando o total contando todos os objectos; *Contar a partir do primeiro número*, se as crianças para calcular 7+12, começam por contar até sete e continuam a contagem sequencial, sete - "oito", "nove", "dez", ..."dezoito" e "dezanove"; *Contar a partir do número* *maior*, um processo idêntico ao anterior só que começam no número maior, no exemplo, o doze, doze - "treze", "catorze", ..."dezoito" e "dezanove"; *Usar factos conhecidos da adição*, quando as crianças dão respostas imediatas, usam habitualmente números simples como, por exemplo, 10+5 e 12+12 e *Usar factos derivados*, que a um nível mais elementar as crianças têm tendência a usar os dobros e acrescentam ou retiram um ou dois. Para calcular 12+13 podem fazer 12+12+1 ou 13+13-1.

Embora com uma sequência não tão claramente definida, Thompson (1995) identifica estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas de subtracção com números até 20, que ilustro com o exemplo do cálculo de 10-4: *Contar o que sobra* – as crianças contam dez dedos e baixam quatro e contam os que sobram; *Contar para trás a partir de* – a criança diz dez e conta para trás quatro números, "nove", "oito", "sete", "seis" ... é seis; *Contar para trás até* - a criança diz dez e conta para trás até quatro, "nove", "oito", "sete", "seis", "cinco" e "quatro" (é provável que utilize os dedos); *Contar para a frente* – a criança diz quatro e depois conta sequencialmente até dez, "cinco", "seis", "sete", "oito", "nove", "dez", esta não é vista como uma estratégia natural na Inglaterra porque a subtracção é entendida como "retirar", e, *Usar factos conhecidos* e *factos derivados*, na subtracção, como os que são usados na adição.

Thompson (1999), noutro artigo, dá realce às estratégias de contagem uma vez que as crianças nos primeiros anos, quando ainda não têm o cálculo estruturado, recorrem frequentemente à contagem para efectuar cálculos, o que vai de encontro com a caracterização do primeiro nível de cálculo - *cálculo por contagem* - feita por Treffers e Busy (2001) já referido neste capítulo. Neste sentido, Thompson (1999) descreve e discute estratégias de adição e subtracção com números até 20 que agrupa em estratégias de contagem e estratégias de cálculo que envolvem o uso de factos numéricos conhecidos ou derivados. Salienta como estratégias de contagem: *contar a partir do primeiro número*; *contar a partir do número maior*; *contar para trás a partir de*; *contar para trás até* e *contar para a frente a partir de*. As estratégias de cálculo usando factos numéricos conhecidos ou derivados são: usar os dobros (na adição), usar os quase dobros na adição ou na subtracção, usar a subtracção como inversa da adição, usar a estrutura do cinco e do dez (na adição e subtracção), compensar e redistribuir. As estratégias de cálculo com números até 20 identificadas por Thompson, são muito semelhantes às referidas em Fuson et al. (1997a) e (Fuson, 2003a) a propósito dos números-dígito, embora as designações não sejam totalmente coincidentes.

No caso das operações adição e subtracção com números de 20 até 100, Thompson (1999) identifica quatro tipos de estratégias mais usadas pelos alunos. Uma das estratégias é a *decomposição decimal*, onde as dezenas e as unidades são tratadas separadamente, por exemplo, para adicionar 27+28, o aluno calcula separadamente 20+20 e 7+8. Esta estratégia, muito usada no reino Unido, é também conhecida por método de *partição*. Outros autores, como Beishuizen (1999), designam-na por 1010 (*dezdez*).

O segundo tipo de estratégia é denominada *saltar* e é também conhecida na literatura por método *cumulativo ou sequencial*. Também designada por Beishuizen (1999) por *N10*. Utilizando esta estratégia para calcular 25+33, o aluno parte do 25 e adiciona, dá um salto de 30, chegando ao 55 e depois um salto de 3, chegando ao 58. Utilizando a mesma estratégia na subtracção, para calcular 54-26, o aluno do 54 dá um salto de 20 para trás e fica no 34, a seguir salta 4 para fazer 30 e depois um salto de 2 que faz 28.

A terceira estratégia identificada, é uma mistura das duas anteriores, também designada por método *misto* ou de *decomposição e saltar e* designada por Beishuizen (1999) por *10S*. Recorrendo ao exemplo 27+28, parte-se do 20, dá-se um salto de 20, obtendo 40 e depois saltos de 5, de 2 e de 3, obtendo sucessivamente 52 e 55.

Finalmente, a quarta estratégia, relacionada com "próximos de múltiplos de dez" é designada *compensação* ou *saltar para além de*. No exemplo, para calcular 19+8, parte-se do 20 (uma unidade à frente) e dá-se um salto de 8, obtendo 28. Mas como era para saltar do 19, compensa-se, dando um salto de uma unidade para trás. Esta estratégia é mais eficiente quando os números são de uma ordem de grandeza próxima de múltiplos de dez. Segundo Thompson (1999), o recurso a esta estratégia é mais comum na Holanda do que em Inglaterra.

Beishuizen (1999) considera uma categorização das estratégias mentais de resolução de problemas de adição e subtracção, idêntica à identificada por Thompson. Numa caracterização breve a essas estratégias salienta que na aritmética com números até 20, prevalecem as estratégias para memorizar e recuperar factos numéricos, enquanto nos números até 100 o conhecimento conceptual e procedimental é mais importante. Nomeadamente, o conhecimento de como lidar com as dezenas vai desempenhar um papel central. Neste contexto, distingue duas estratégias fundamentais: a *decomposição decimal* (*1010*) e *método saltar* (*N10*) - uma estratégia de contagem sequencial de dezenas - as dezenas são contadas (para a frente ou para trás) a partir de um dos números sem o decompor; na primeira estratégia, ambos os números são decompostos em dezenas e unidades e operados em separado, tal como Thompson (1999) refere.

Uma análise feita por Beishuizen et al. (1997) sobre a utilização destas estratégias na resolução de problemas de adição e subtracção evidencia erros sistemáticos nos procedimentos associados à estratégia *1010*, em situações de subtracção. Em casos como 65-38 a criança faz 60-30=30 e a seguir 8-5=3 e responde 33; outro erro sistemático dos alunos no mesmo exemplo: 65-38 a criança faz 60-30=30 depois 30-5-8=17 (subtrai tudo).

Em relação à estratégia 10S, situam-na na transição das estratégias 1010 para a *N10*. Uma vez os números decompostos e feito o cálculo com as dezenas, as unidades são tratadas de forma sequencial o que ajuda a ultrapassar os erros cometidos na estratégia *1010*. Tomando o exemplo anterior seria: 60-30=30; 30+5=35; 35-8=27 (Beishuizen, et al., 1997).

Relativamente ao uso de estratégias com vista à flexibilização do cálculo mental dos alunos, coloca-se a questão: Deverão estas estratégias ser ensinadas tipo "receituário"? Então estas devem passar a constar nos nossos manuais! Thompson (1999) defende o conhecimento, por parte dos professores, destas estratégias para uso pessoal e com o objectivo de ajudar os alunos a construir as suas próprias estratégias de cálculo mental (escrito). Mesmo que o seu ensino não seja prescrito nos programas oficiais elas são importantes. No entanto, isso não significa que as imponham como estratégia de ensino. Para que o professor possa ajudar os alunos a desenvolver o cálculo mental é importante que ele próprio saiba calcular de forma eficiente.

Na sequência das suas pesquisas Thompson apresenta um modelo de cálculo mental que se esquematiza na figura 1:

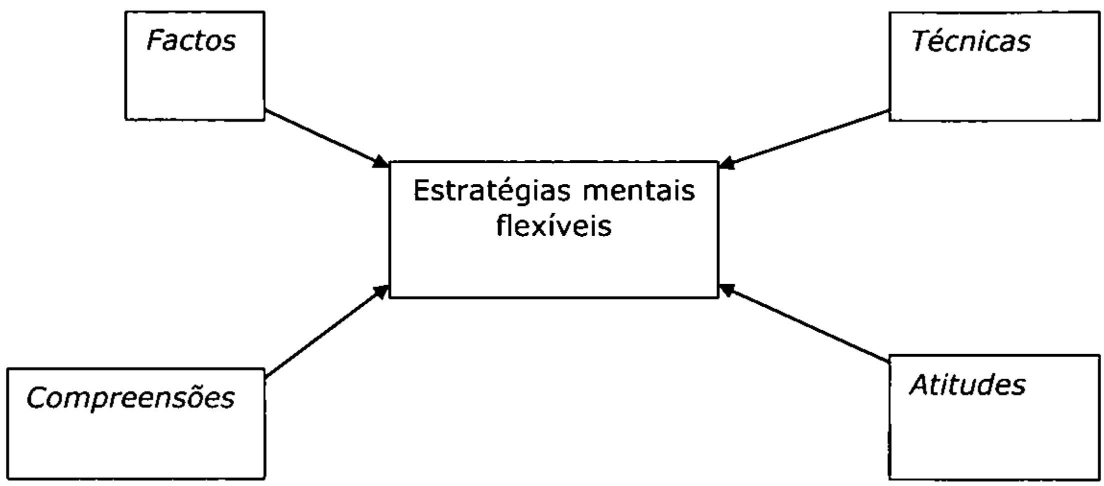


Figura 1 - Modelo de cálculo mental de Thompson

O modelo apresentado compreende quatro componentes, consideradas bons contributos para o desenvolvimento individual de estratégias de cálculo mental com números de qualquer ordem de grandeza. Estas componentes compreendem: *factos*, *técnicas*, *compreensões* e *atitudes*. A partir deste modelo, conjecturou que, crianças bem sucedidas no cálculo mental são susceptíveis de possuir todos os quatro atributos.

A componente "factos" inclui aspectos como, ter conhecimento do nome de números específicos, incluindo dobros e múltiplos de dez; sensibilidade em relação aos factos (básicos) da adição e subtracção de números até vinte. "Compreensões", abrange o conhecimento explícito ou implícito, das variadas propriedades do sistema numérico que se espera de alguém que tenha um bom sentido de número (comutatividade, associatividade e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição). Para além deste conhecimento, Thompson considera que um "bom calculador mental" também deve compreender que, adicionar ou subtrair "zero" não altera o resultado (identidade aditiva), que as subtracções podem ser resolvidas usando factos aditivos conhecidos (inverso aditivo), que adicionar múltiplos de "dez" é equivalente a adicionar os correspondentes números-dígito e que, por exemplo, se 3 + 6 é 9 então 473 + 6 é 479.

A componente "técnicas" engloba a ideia de que uma criança precisa ter adquirido certas habilidades mentais, como por exemplo, contar de forma flexível ou saber subtrair dez de um número sem contar para trás. As "técnicas" vão desde adicionar 1 ou subtrair 1 de um número pequeno, até situações em que para multiplicar por 50, multiplica por 100 e reduz para metade.

"Atitudes" inclui um aspecto importante no uso de estratégias mentais, por parte das crianças, que é a auto-confiança. As crianças podem ter desenvolvido muitas competências associadas ao cálculo, mas se não têm confiança é pouco provável que utilizem esses factos ou habilidades, de forma a tornar as estratégias mais eficazes. Como tal, o autor considera importante uma mudança de atitude das crianças e dos adultos em relação à Matemática.

Thompson, destaca como requisitos mínimos para as crianças serem bem sucedidas em cálculo mental: (i) um conhecimento seguro dos factos numéricos; (ii) uma boa compreensão do sistema numérico – como funciona, que operações são ou não permissíveis, de modo que factos conhecidos combinados, usando as operações apropriadas, possam gerar outras estratégias (ou outros factos) mais eficientes; (iii) a capacidade de satisfazer com rigor as competências apoiadas por esses entendimentos e (iv) a confiança em usar o que sabem na descoberta das suas próprias estratégias e soluções.

A maior parte das investigações sobre estratégias usadas na resolução de problemas de adição e subtracção com números multidígitos diz respeito a números com dois algarismos. De facto, existe pouca investigação que associe e faça a extensão dos métodos usados pelas crianças na adição e subtracção com números a partir de quatro dígitos. No entanto, considerando as características do nosso sistema de numeração, decimal e posicional, os métodos de decomposição ou recomposição utilizados para adicionar e subtrair com números com dois dígitos parecem fáceis de generalizar para números maiores (Fuson et al., 1997a).

Em suma, a investigação produzida ao longo das últimas décadas sobre a adição e a subtracção com números multidígitos sugere que as crianças são capazes de inventar as suas próprias estratégias, desde que o contexto de sala de aula seja favorável. Os resultados dos estudos que envolveram abordagens não tradicionais relacionadas com estas operações indicam que estas auxiliam os alunos a compreender e a explicar as estratégias utilizadas e referem a importância das abordagens iniciais serem suportadas por materiais de contagem e por representações (desenhos) elucidativas da estrutura do sistema decimal.

3. Sentido de número

O sentido de número refere-se à compreensão global e flexível dos números e operações bem como das suas relações. Possuir sentido de número é um dos principais atributos que melhor distingue o Homem das máquinas tecnológicas, (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p. 5), o que quer dizer que, adquirir sentido de número pode ser uma mais-valia na formação pessoal, quer de crianças quer de adultos e constitui um desafio em relação a eras anteriores. Assim, importa desenvolver estratégias de cálculo úteis, eficazes e que revelem um verdadeiro sentido do número para utilizar no dia-a-dia, na vida profissional e como cidadãos activos que fazem parte de uma sociedade em evolução tecnológica.

Neste capítulo discuto vários aspectos estruturantes relacionados com o sentido de número, contexto que enquadra os dados empíricos analisados no estudo. Com o objectivo de clarificar o que se entende por sentido de número começo por discutir o seu significado na perspectiva de vários autores. De seguida analiso como o conceito de sentido de número é encarado nos documentos curriculares oficiais da escolaridade básica quer a nível internacional quer a nível nacional, procurando perceber se no contexto de trabalho das operações com números eles têm como horizonte o desenvolvimento do sentido de número. Por fim, apresento e discuto estudos relacionados com aspectos importantes a ter em conta no desenvolvimento do sentido de número: o cálculo mental, os algoritmos e o papel do professor como elemento facilitador da aprendizagem dos números e das operações.

3.1. Significado

Na língua inglesa, para designar sentido de número, utiliza-se o termo *number sense*, uma expressão com alguma analogia com a que se utiliza para designar "senso comum" - *common sense* (McIntosh et al., 1992). Da mesma forma, a expressão sentido de número não se define com objectividade, dado que esta se foca na natureza intuitiva do conceito de número e no seu desenvolvimento gradual, e, por isso, tem originado diferentes interpretações por parte de educadores matemáticos, autores de materiais de natureza curricular e investigadores (McIntosh et al., 1992, Reys, 1998, Greenes et al., 1993, NCTM, 1998).

Desde os finais dos anos 80 que vários autores têm tentado definir, de modo mais ou menos exaustivo, o significado da expressão sentido de número, tanto do ponto de vista da psicologia (Greeno, 1989, 1991) como do ponto de vista da educação Matemática (Markovits & Sowder, 1994, McIntosh et al., 1992; B. Reys, 1994; Yang 2003a).

De uma forma geral, Greeno (1991) associa o termo sentido de número a um conjunto de capacidades que incluem o cálculo mental flexível, a estimação numérica e a estimação associada a juízos quantitativos. Considerando-o, no domínio conceptual, uma condição básica do conhecimento dos números e das quantidades que eles representam, McIntosh et al. (1992), salientam que o sentido de número é um processo complexo, associado aos números e às operações, e às relações entre eles.

Não havendo uma definição aplicável a determinada situação, com a qual se identifique a existência de sentido de número há, no entanto, autores que afirmam reconhecer-se, facilmente, a sua existência ou ausência em contextos práticos e actividades matemáticas. Neste sentido, Hope (1989) afirma: "O sentido de número não pode ser definido com precisão, mas situações onde está ausente podem ser facilmente reconhecidas" (p. 12).

O seguinte episódio referido por McIntosh et al. (1992), identifica uma situação de ausência de sentido de número, em que se verifica uma "dependência cega" do algoritmo e ausência de cálculo mental.

> Um empregado de uma papelaria, em Inglaterra, vendia diários que custavam 2.50 libras. Em determinado período os jornais custavam metade do preço marcado. Um cliente pegou em dois e perguntou quanto custavam. O empregado pegou no primeiro diário, num lápis e fez a divisão de 2.50 por 2 recorrendo ao algoritmo tradicional e obteve 1.25. Depois pegou no segundo diário e efectuou o mesmo cálculo, pelo mesmo processo. No final, utilizou o algoritmo vertical da adição para somar os valores obtidos anteriormente (1.25+1.25) e com um sorriso disse para o cliente: "são duas libras e meia, por favor" (p. 2).

Outros autores têm discutido e reflectido acerca das características do sentido de número, identificando, por vezes, as suas componentes (Markovits & Sowder, 1994, McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992, Sowder & Schappelle, 1989; Yang, 2001, 2003a, 2003b, 2005a) e optando por enunciar características que o termo engloba.

Segundo Greeno (1991) "o sentido de número é um termo que requer uma análise teórica, em vez de uma definição" (p. 170), no sentido em que, reconhecemos exemplos providos de sentido de número, contudo não temos uma definição satisfatória que enumere as suas características. Outros autores optam por identificar aspectos associados ao seu desenvolvimento, pelo que não procuram definições, mas sim aspectos essenciais para desenvolver o sentido de número.

Considerando, em particular, o conceito, os modelos que o caracterizam e a abordagem do sentido de número que preconizam a aprendizagem da Matemática no Ensino Básico, em 2000 o *National Coucil of Teachers of Mathematics* (NCTM), centra-se nos aspectos relativos à aprendizagem do sentido de número, em que se preconiza um conhecimento profundo do que são, como se representam, como se relacionam entre si, como integram as estruturas e propriedades e como se utilizam em contexto de resolução de problemas.

Subjacente a considerar estes aspectos, está a ideia de que o sentido de número não se desenvolve isolado dos sentidos das operações e está igualmente e intimamente relacionado com a resolução de problemas.

Sendo o sentido de número algo impreciso, pessoal e personalizado, dado que está relacionado com as ideias que cada um cria acerca dos números e das operações, e por isso, nem sempre fácil de descrever, alguns autores utilizam a expressão "caracterizar sentido de número", como é o caso de McIntosh et al. (1992). Para além de definirem o que entendem por sentido de número, apresentam um modelo que o caracterizam completamente e é assumido como referência por outros autores, ou seja, um conjunto de ideias e processos que permitem torná-lo evidente. McIntosh et al. (1992), consideram três grandes áreas (i) *conhecimento e destreza com números,* (ii) *conhecimento e destreza com as operações* e (iii) *aplicação do conhecimento e da destreza com números e as operações em situações de cálculo,* cujas características resumo em seguida.

(i) *O Conhecimento e destreza com números* engloba:

a) *Sentido da regularidade dos números* - compreender a organização do sistema posicional auxilia a compreensão dos números. É importante organizar, comparar e ordenar mentalmente os números. Por exemplo, quando um aluno aprende a contar a partir de 20, começa a identificar, oralmente e por escrito, padrões inerentes ao sistema de numeração. Estes padrões constituem um suporte importante para a generalização do processo de contagem.

b) *Múltiplas representações dos números* – É importante reconhecer que o número pode ter várias representações, e, ser pensado e manipulado de diferentes maneiras, consoante o contexto em que se insere. Por exemplo, numa ida ao supermercado se a despesa for de 8,53€, podemos pagar com uma nota de 10€ e receber de troco 1,47€ ou podemos dar uma nota de 10€ e 3 cêntimos e receber de troco 1moeda de 1€ e outra de 50 cêntimos.

c) *Sentido das grandezas relativa e absoluta dos números* – Diz respeito à habilidade de reconhecer o valor relativo de um número ou quantidade relativamente a outro número ou quantidade. Perguntar, por exemplo, a um aluno do 3º ano do ensino básico, se já viveu mais, ou menos que 1000 dias, dá-lhe a oportunidade de pensar na ordem de grandeza do número 1000 num contexto pessoal e ajuda-o a entender melhor o valor de 1000 noutro contexto.

d) *Sistemas de referência* - Significa utilizar referências numéricas para avaliar uma resposta ou arredondar um número de modo a facilitar o cálculo. As referências podem ser valores numéricos desprovidos de qualquer contexto real ou surgir de atributos pessoais. Por exemplo, um aluno pode usar a sua altura para estimar a altura de outra pessoa.

(ii) O *Conhecimento e destreza com as operações* inclui:

a) *Compreensão do efeito das operações* - O conceito de operação implica compreender o seu efeito em diferentes números, incluindo naturais ou racionais. É importante que sejam explorados diversos modelos de modo que os alunos se habituem a visualizar determinada operação em vários contextos e modelos. É igualmente importante, reflectir sobre as interacções entre as operações e os números. Por exemplo, "o que acontece quando dois números inferiores a 1 são multiplicados?", ou, "o que acontece se um dos factores é inferior à unidade e o outro superior?".

b) *Compreensão das propriedades matemáticas* - É importante ligar a compreensão das propriedades matemáticas à sua utilização prática. Por exemplo, quando calculamos mentalmente 36x4, podemos pensar em 4x35 e 4x1, ou seja, 140+4 (porque 35+35 é 70 e 70+70 é 140) sendo 144. Aqui aplica-se a propriedade comutativa, trocando a ordem dos factores, e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo 4x36 em 4x35+4x1. Podemos pensar também em 4x40-4x4 ou 30x4+6x4. Em qualquer dos casos, fica realçado o uso de sentido de número.

c) *Compreensão das relações entre as operações* - as conexões entre as operações permitem flexibilizar o pensamento e resolver problemas. Por exemplo, podem-se resolver problemas de subtracção adicionando, problemas de divisão multiplicando ou perceber que a multiplicação é uma adição sucessiva.

(iii) *A Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo* refere-se a:

a) *Compreender a relação entre o contexto e os cálculos necessários* – Significa perceber que o contexto do problema pode fornecer pistas sobre o modo de usar os números e as operações. Envolve também avaliar a situação percebendo se é necessário efectuar um cálculo exacto ou se basta determinar um valor aproximado. Ao considerar, por exemplo, a situação: "O José gastou 2,88€ em maçãs, 2,38€ em bananas e 3,76€ em laranjas". Se a pergunta for: "Quanto gastou o José na fruta?", é necessário dar uma resposta exacta, então devem ser considerados os valores indicados e aplicar um processo de cálculo (mental ou escrito); se a questão for: "Será que o José pode pagar a despesa com uma nota de 10€?", então podem usar-se valores aproximados.

b) *Consciencialização da existência de múltiplas estratégias* – Relaciona-se com a tomada de consciência de que há várias estratégias de resolução para um mesmo problema e com perceber que se uma estratégia inicial parece improfícua, formular e aplicar uma nova estratégia pode ser um caminho a admitir.

c) *Apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente* – Significa reconhecer que algumas estratégias de cálculo são mais eficientes do que outras. Por exemplo, um aluno do 2º ano de escolaridade perante a pergunta: "quanto é 8+7?" não deve adoptar a estratégia de contar um a um, mas antes pensar em 7+7+1 ou em 8+2+5, baseado no conhecimento que já possui de que 7+7= 14 e de que 8+2=10, respectivamente.

d) *Sensibilidade para rever os dados e o resultado* – Possuir sentido de número é, também, saber examinar a solução obtida à luz do problema original, é ter espírito crítico para avaliar se a resposta "faz sentido". Esta análise, é geralmente, rápida, natural e torna-se parte integrante do processo de resolução de problemas.

Numa perspectiva de aprendizagem, a resolução de problemas da vida real exige, por vezes, raciocínios e competências de cálculo para os quais é necessário que os alunos tenham desenvolvido o sentido de número colocando em interacção as suas componentes. Estas interacções são ilustradas por McIntosh et al. (1992) da seguinte forma:

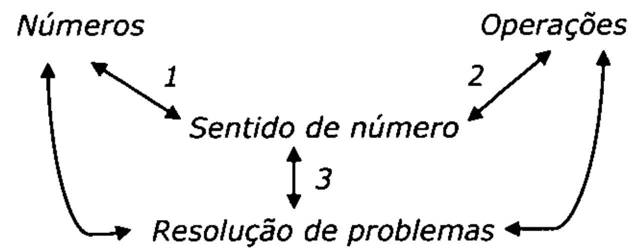


Figura 2 - Interacções entre as componentes do sentido de número, de acordo com o modelo proposto por McIntosh, Reys e Reys, 1992, (p. 5)

De acordo com esta estrutura é fundamental que os alunos, perante situações concretas de cálculo, sejam capazes de mobilizar o conhecimento que têm sobre os números e as operações e o apliquem de uma forma flexível e eficaz, relacionando o contexto com as estratégias usadas. Podemos dizer que, numa perspectiva de ensino, quanto melhor for o desenvolvimento e aperfeiçoamento deste tipo de conhecimentos e procedimentos de cálculo flexível, melhor será o sentido de número dos alunos, o que lhes permitirá resolver as diversificadas situações numéricas que surgem na vida de todos os dias.

As caracterizações de sentido de número propostas por diferentes autores e referidas anteriormente têm pontos comuns. De um modo geral todos os entendem como um conceito holístico, intuitivo e associando-o a uma compreensão global sobre os números, as operações e as relações entre eles. Mais especificamente, o sentido do número inclui o conhecimento acerca da grandeza relativa dos números, acerca dos efeitos relativos das operações com números e ainda o desenvolvimento de números de referência associados a quantidades e medidas. Nas tentativas de operacionalização do conceito é usual ser referida a capacidade para calcular usando os números de modo flexível, para estimar a grandeza relativa e a razoabilidade de um resultado, para passar de umas representações numéricas para outras e ainda para relacionar números, símbolos e operações (Markovits & Sowder, 1994). Consideram ainda que o sentido de número não é algo que se aprende de uma vez só, mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de toda a escolaridade e até mesmo ao longo da vida.

Apesar de ter identificado pontos de vista não totalmente coincidentes sobre o modo de entender sentido de número, note-se que há um certo consenso em considerar que a definição global avançada por McIntosh caracteriza aspectos essenciais do sentido de número (Brocardo et al., 2008, Ponte et al., 2007).

Por isso, neste trabalho, adopto o seguinte modo de entender o significado de sentido de número:

> O sentido de número refere-se a uma compreensão geral do indivíduo sobre os números e as operações juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis na manipulação dos números e das operações. Reflecte uma capacidade e uma predisposição para usar os números e os métodos de cálculo como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação.
> (McIntosh et al., 1992, p. 3)

3.2. Sentido de número no Currículo

É em 1999 que em Portugal se começam a incluir referências ao sentido de número em documentos curriculares. O documento então publicado adopta uma definição de sentido de número muito próxima da de McIntosh et al. (1992). Destaca, também, o facto de o seu desenvolvimento não ser confinado a uma fase da vida escolar do aluno, mas ir sendo ampliado ao longo de todo o seu percurso escolar, desde os primeiros anos e, eventualmente, durante a sua vida adulta (Abrantes et al., 1999).

Em 2001 é editado o "Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais" (DEB, 2001). Este documento apresenta um conjunto de competências consideradas essenciais e que devem ser desenvolvidas ao longo da escolaridade básica, assim como as competências específicas que dizem respeito a cada uma das áreas disciplinares.

Relativamente à disciplina de Matemática e ao domínio dos "Números e Cálculo", este documento especifica os aspectos da competência matemática que todos devem desenvolver ao longo do Ensino Básico:

> * A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
> * O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como as propriedades das operações nesses conjuntos;
> * A aptidão para efectuar cálculos com os algoritmos de papel e lápis, mentalmente ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é adequado à situação;
> * A sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimativa;
> * A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;
> * A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados. (DEB, 2001, p. 60)

Ao nível do 1º ciclo especifica:

> * A compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações;
> * O reconhecimento de números inteiros e decimais e de formas diferentes de os representar e relacionar, bem como a aptidão para usar as propriedades das operações em situações concretas, nomeadamente, para facilitar a realização de cálculos. (DEB, 2001, p. 61)

Este documento, apesar de não referir explicitamente a expressão sentido de número, integra na competência matemática que todos devem desenvolver, no domínio dos Números e do Cálculo, os aspectos que McIntosh et al. (1992) incluem na sua caracterização de sentido de número. Considera ainda que a competência matemática inclui uma compreensão global do número e das operações e, a capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações.

Em finais de 2007 é publicado o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), em início de generalização no ano lectivo 20010/11. Este programa apresenta-se estruturado em quatro temas: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados.

O estudo do tema Números e operações baseia-se em três ideias fundamentais, "promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo" (ME, 2007, p. 7). Globalmente, valoriza o desenvolvimento do cálculo mental, a capacidade de estimação e o uso de valores aproximados. No caso particular do 1.º Ciclo, considera que todo o conhecimento dos números e suas representações, adquiridos informalmente na experiência do quotidiano e na educação pré-escolar, constituem uma base de aprendizagem do tema, tendo como horizonte o desenvolvimento do sentido de número. Entende-se sentido de número como uma capacidade de decomposição e estimação dos números, e de reconhecer a sua grandeza e compreensão dos vários significados a eles associados.

O sentido do número é explicitamente referido no propósito principal de ensino do Números e operações: "Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (ME, 2007, p. 13).

O PMEB é bastante incisivo na estruturação de números e exploração de relações numéricas, tal como na importância destas relações na compreensão das operações aritméticas e no desenvolvimento do sentido de número. Valoriza, ainda, um trabalho diversificado e consistente com os números e as operações, devendo-se colocar em prática estratégias de cálculo mental apoiado por registos escritos, ligado ao desenvolvimento do sentido de número.

Mais do que a ênfase no cálculo *per si* é realçada a importância da compreensão dos alunos, evidente mesmo quando faz referência à aprendizagem dos algoritmos.

Este novo programa rompe claramente a tradição de focar o trabalho com os números e as operações nos algoritmos e na resolução de exercícios rotineiros de cálculo, focando o ensino dos números e operações numa perspectiva de desenvolvimento de sentido do número..

A par da implementação deste programa têm sido publicados materiais de natureza curricular que colocam, igualmente, a ênfase no desenvolvimento do sentido de número (por exemplo, Brocardo et. al., 2010; Mendes et.al., 2010, Menezes et al., 2009).

A nível internacional, a preocupação com as questões associadas à compreensão e flexibilidade do cálculo numérico surgem ainda na década de 80 do século XX. Por exemplo, o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado nos Estados Unidos em 1989 (NCTM, 1992), dedica uma das normas ao sentido de número. Outro documento de natureza curricular, publicado em 2000 (NCTM, 2007), refere que: "a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido de número e a aquisição da destreza no cálculo aritmético constituem o cerne da educação Matemática para os primeiros anos do ensino básico" (NCTM, 2007, p. 34).

3.3. Desenvolver o sentido de número

Desenvolver o sentido de número está muito associado a trabalhar o cálculo mental e à escolha de contextos facilitadores da compreensão numérica.

Tendo como foco uma aprendizagem dos números e das operações no desenvolvimento do sentido de número, é pertinente que os alunos adquiram uma compreensão global do número e das operações em paralelo com a capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer juízos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Neste ponto discuto aspectos relacionados com o desenvolvimento do sentido de número. Começo por analisar a sua estreita relação com o cálculo mental e clarificar distinções entre cálculo mental e cálculo algorítmico. Finalmente, discuto o papel do professor no desenvolvimento do sentido de número.

3.3.1. Cálculo mental

O poder tecnológico da sociedade actual exige cada vez mais aos cidadãos o desenvolvimento de competências de cálculo significativas que lhes permitam resolver problemas em diversas situações. A acessibilidade da calculadora leva a equacionar o seu uso generalizado no ensino acentuando a necessidade de analisar criticamente resultados e de tomar decisões rápidas no domínio da resolução de problemas. Fica assim, de certa forma, acentuada a importância do cálculo mental flexível e enfatiza-se a importância da capacidade de calcular mentalmente (Brocardo e Serrazina, 2008).

Nas indicações curriculares a referência à importância do cálculo mental é vulgar e frequentemente associado ao cálculo numérico. No entanto, é importante clarificar o que se entende por cálculo mental. Calcular mentalmente é só fazer contas "de cabeça"? Ou podemos usar papel e lápis? Quando se efectua o algoritmo "na cabeça" podemos falar em cálculo mental? (Brocardo e Serrazina, 2008).

Klein (1998) clarifica que cálculo mental, não é fazer as contas na cabeça, mas sim usando a cabeça.

Buys (2001) descreve cálculo mental como um "movimento ágil pelo mundo dos números", que tem as seguintes características:

(i) Opera com valores numéricos e não com dígitos;
(ii) Usa as relações numéricas e as propriedades das operações básicas;

(iii) É sustentado pelo desenvolvimento do sentido de número e pelo conhecimento de factos numéricos;

(iv) Permite o recurso a registos escritos, mas é sobretudo necessário calcular mentalmente (Buys, 2001).

No Programa de Matemática do Ensino Básico, a importância do cálculo mental e a estreita relação entre sentido de número e cálculo mental é bem ilustrada:

> O cálculo mental tem de ser desenvolvido desde o início do 1º ciclo e está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número. (...) O cálculo mental caracteriza-se por: (i) trabalhar com números e não com algarismos; (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre os números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numerais elementares; (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação. Existem diferentes estratégias de cálculo mental que devem constituir objectivos de aprendizagem na aula de Matemática, (...) (ME, 2007, p. 10)

Esta caracterização de cálculo mental vai de encontro às características indicadas por Buys (2001).

Em contexto de sala de aula importa também clarificar como é que o cálculo mental deve ser trabalhado. Em Portugal, até à década de 90, os programas de Matemática do 1º ciclo referem a importância do cálculo mental sem que, no entanto, explicitem como é que ele deve ser desenvolvido. Não referem estratégias de cálculo nem metas relativamente ao que o aluno deve conseguir calcular mentalmente (Brocardo e Serrazina, 2008).

Autores britânicos e holandeses, consideram que a aritmética mental deve começar pelo desenvolvimento de estratégias informais da criança em vez de impor procedimentos formais (Treffers e De Moor, 1990).

Ter boa capacidade de cálculo mental é essencial para resolver situações com números, incluindo olhar para eles e interpretá-los no contexto em que se inserem. Neste sentido, Buys (2001), apresenta três formas básicas que este tipo de cálculo assume:

(i) *O cálculo mental em linha*, quando os números são pensados como se fossem objectos colocados numa recta numérica, e, as operações representam movimentos (saltos) ao longo da recta;

(ii) *O cálculo mental recorrendo à decomposição decimal,* quando se opera usando a decomposição decimal dos números envolvidos;

(iii) *O cálculo mental usando estratégias variadas,* quando se usam os números estruturados de diversas formas e as propriedades das operações adequadas a essas estruturas.

3.3.2. Os algoritmos

Quando se fala de sentido de número, qual a importância e o papel que se reserva para os algoritmos? O que se entende por algoritmo?

A perspectiva mais unânime é a de considerar algoritmo como um conjunto de procedimentos que obedecem a determinadas regras. Esta perspectiva, não é, contudo, única.

Brocardo e Serrazina (2008) apresentam duas perspectivas de entendimento do que é um algoritmo no contexto das operações básicas da aritmética. Uma, citando Thompson (1999), que adopta uma definição ampla de algoritmo, na qual considera três categorias de algoritmos escritos: *standart* e formal, onde inclui os algoritmos tradicionais; não *strandart* e formal considerando as representações verticais com base em decomposições de números e não *standart e* informal onde inclui uma variedade de procedimentos horizontais a partir de diversas decomposições dos números. Outra, citando Treffers, Noteboom e Goeij (2001), para os quais o algoritmo é o produto final usando a decomposição decimal dos números em cálculo posicional sobre dígitos. Neste processo é importante o conceito de cálculo em coluna, caracterizado por usar a decomposição decimal, ter em conta o valor posicional dos números e operar da esquerda para a direita.

Brocardo et al. (2003) reconhecem que a utilização de procedimentos algorítmicos é uma característica importante da Matemática e que os algoritmos têm algumas potencialidades, nomeadamente, o serem válidos para qualquer número e serem eficazes do ponto de vista de cálculo, isto é, desde que se usem as regras de forma correcta, chegamos sempre a um resultado certo. No entanto, na opinião destes mesmos autores, os algoritmos não devem ser introduzidos demasiado cedo, antes de os alunos terem a oportunidade de "desenvolver o sentido de número e pensar de um modo crítico sobre o sentido das operações" (p. 15), sob pena de não desenvolverem outras estratégias de cálculo mais eficientes.

Em Portugal, o ensino tem valorizado o domínio dos procedimentos de cálculo no sentido mais pobre, isto é, o ensino das quatro operações aritméticas tem sido muitas vezes confundido com o ensino e prática dos algoritmos — saber fazer as 'contas' — interessando o saber fazer e não havendo muita preocupação com a sua compreensão. Contudo, temos indícios de alguma mudança ao nível das indicações curriculares. O PMEB ao nível do 1.º ciclo especifica que "A aprendizagem dos algoritmos com compreensão, valorizando o sentido de número, deverá desenvolver-se gradualmente para as quatro operações. (...) os alunos devem ter a possibilidade de usar formas de cálculo escrito informais, (...) ou realizar algoritmos usuais com alguns passos intermédios" (ME, 2007, p. 14). Sugere-se, deste modo, uma abordagem aos algoritmos como o culminar de um trabalho gradual centrado na compreensão dos números e das operações. (Brocardo e Serrazina, 2008).

A inclusão dos algoritmos no currículo tem sido alvo de alguma discussão entre investigadores ligados à educação matemática, mesmo a nível internacional.

Saliente-se como aspecto "contra", o efeito negativo de uma aprendizagem cujo foco sejam os algoritmos, evidenciado por vários autores. Por exemplo, Brocardo et al. (2008), citando Kamii e Dominick (1998), após a análise de resoluções de três grupos de alunos - (grupo 1) alunos que não conheciam os algoritmos; (grupo 2) alunos que tinham aprendido os algoritmos na escola; (grupo 3) alunos que tinham aprendido alguns algoritmos em casa - destacam duas conclusões: (i) globalmente o grupo 1 foi o que apresentou a maior percentagem de respostas correctas; (ii) os alunos do grupo 2 que erraram o resultado apresentaram respostas consideravelmente menos razoáveis do que as respostas incorrectas apresentadas pelos alunos do grupo 1.

Bass (2003) considera que estas conclusões não devem ser entendidas como advogando a não inclusão dos algoritmos no currículo, pois estes, quando trabalhados de forma adequada constituem uma parte importante do que significa saber calcular fluentemente.

Em oposição ao peso dado aos algoritmos alguns autores defendem a posição de que os alunos devem ter liberdade para inventarem as suas estratégias e procedimentos.

Este debate de ideias é um contributo importante na definição do lugar dos algoritmos no currículo. Existe algum consenso de que os algoritmos não devem ser o foco central do tema números e operações e a sua aprendizagem deve emergir de um trabalho baseado no desenvolvimento do sentido de número, de desenvolvimento de procedimentos de cálculo ligados à construção dos números e à reconstrução do seu sistema posicional (Brocardo, 2008).

Considera-se também fundamental que a aprendizagem dos algoritmos surja a partir de estratégias informais evoluindo progressivamente para formas mais formais, o que significa que a sua introdução no início das aprendizagens não é aconselhável, tal como sugere Serrazina (2002).

3.3.3. O papel do professor

O desenvolvimento de sentido de número nos alunos é, actualmente, um objectivo fundamental em educação matemática e o papel do professor é fundamental na concretização desse objectivo.

Um primeiro aspecto prévio relaciona-se com o conhecimento matemático do professor: é essencial que o próprio professor possua "um bom sentido de número" (Whitacre, 2006). Ao nível didáctico, o professor deve desenvolver um trabalho tendo em vista a discussão dos métodos de resolução de problemas usados pelos alunos. Um papel que se alicerça em aulas que permitem: (i) aos alunos envolverem-se em situações matemáticas com significado para eles, (ii) uma ênfase no envolvimento das situações matemáticas propostas e não na obtenção de respostas rápidas, (iii) uma discussão e justificação de procedimentos de solução alternativos e (iv) a análise de erros de modo a aumentar a compreensão matemática dos alunos (Fuson, 1992). É nesta perspectiva que os professores devem conduzir o seu papel estruturante e orientador de aprendizagens, um papel que ajuda os alunos a "reinventar" a matemática (Gravemeijer, 2005).

Neste sentido, para além da realização de tarefas propriamente ditas, o professor deve prever momentos de discussão de estratégias e sistematização de conceitos e representações matemáticas. De facto, a análise e reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos fornecem dados muito importantes ao professor, que lhe permitem acompanhar e identificar dificuldades sentidas por eles e perceber os seus modos de pensar para os poder ajudar a progredir nas aprendizagens (Brocardo et al., 2005).

É importante que o professor alicerce a sua prática na perspectiva de facilitador de aprendizagem dos alunos, o que lhe coloca alguns desafios. Nomeadamente, o de facilitador de diálogo - o professor deve utilizar estratégias que promovam um diálogo vivo e clarificador de conceitos. Deve colocar questões que ajudem os alunos a ouvir os outros e a atribuir importância ao que cada um diz. Deve igualmente propor contextos próximos dos alunos - ao propor situações cujos contextos estão relacionados com experiências do dia-a-dia dos alunos, está a favorecer o desenvolvimento de ideias e procedimentos matemáticos. Quando o professor coloca questões a respeito de situações que os alunos conhecem bem, estes ficam motivados e entusiasmados para realizar o trabalho necessário (Brocardo et al., 2005). O professor deve ainda organizar propostas de natureza diversa seleccionando, adaptando ou criando tarefas de natureza variada que irá propor aos seus alunos: exercícios, problemas a tarefas de investigação (Fosnot & Dolk, 2001).

Kraemer (2008) define quatro princípios de trabalho que o professor deve seguir, para atingir o objectivo a que se propõe na planificação do processo ensino/aprendizagem:

(1) "*Observar e registar a forma de ver, pensar e calcular dos alunos tal como eles vêm, pensam e calculam*" - é essencial que o professor

compreenda como os alunos apresentam, explicam e justificam os seus cálculos. A forma como modelam as suas resoluções reflecte a forma de pensar que desenvolveram ao longo dos anos.

(2) "*Analisar e organizar as soluções a partir das noções, procedimentos e representações usadas pelos alunos*" - na análise é importante, que o professor, ligue os conceitos matemáticos, com as estratégias de cálculo e com a representação simbólica utilizadas pelos alunos. Por outro lado, deve organizar as resoluções dos alunos da mais informal para a mais formal explicitando as possíveis alterações a efectuar que lhes permitam progredir para níveis superiores de formalização.

(3) "*Pensar como as condições da tarefa podem estimular os alunos a transformar as suas noções, procedimentos e representações num nível mais alto de compreensão*" - numa tarefa é importante a sua intencionalidade, a forma como as questões são colocadas, o tipo de exploração contextualizado que se faz. Factores que convidam os alunos a pensar, permite-lhes fazer descobertas e assim, abrir horizontes na matematização das suas ideias, procedimentos e representações.

(4) "*Avaliar e diagnosticar para deslocar as suas fronteiras e as dos alunos*" - interligar a avaliação e o diagnóstico pode constituir um bom princípio na prática lectiva do professor. Permite, antecipadamente, ter conhecimento das aprendizagens que os alunos já realizaram para a partir daí planificar um percurso que lhes permita progredir nas aprendizagens. Tal como permite ao professor estabelecer as suas próprias fronteiras e justificar as suas decisões de planificação. Daí que a ideia chave deste tipo de abordagem se baseia em: "melhor compreender as crianças", "melhorar a sua prática" e "aprender a adaptar as suas aprendizagens à sua medida" (Kraemer, 2005, p. 26).

Estes princípios de trabalho dizem respeito ao papel que o professor pode ter numa efectiva aprendizagem em geral, pelo que são relevantes no caso particular de desenvolvimento de sentido de número.

Em suma, o grande desafio que se coloca ao professor é conseguir estruturar o ensino e a aprendizagem tendo presente o que Ponte et al. (2007)

referem: "A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida (...) pelo professor."

4. Metodologia

Este estudo, pretende analisar a articulação entre o diagnóstico das ideias e procedimentos numéricos que os alunos usam na resolução de problemas e a progressão da sua aprendizagem. Mais concretamente, tem o objectivo de identificar as estratégias que os alunos usam na resolução de tarefas de subtracção, a sua evolução e o conhecimento que têm sobre os números. A partir daí, tem como propósito analisar a progressão dos conhecimentos numéricos dos alunos.

Este estudo pretende dar resposta às seguintes questões:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos e que tipo de erros cometem na resolução de problemas que envolvem subtracção e como evoluem essas estratégias ao longo do 2.º, 3.º e 4.º anos?

- Que conhecimentos têm os alunos sobre os números e como evoluem ao longo do 2.º, 3.º e 4.º anos?

- Quais as transformações sucessivas das ideias e procedimentos, dos alunos, quando passam de um nível de raciocínio e de cálculo a outro?

Neste capítulo, apresenta-se a organização do estudo, descreve-se o modo como foram seleccionadas as tarefas de diagnóstico e como foram realizadas as entrevistas clínicas, bem como o modo de organização de todas as etapas seguidas. Justificam-se as opções metodológicas do estudo, no que respeita, nomeadamente, à escolha dos participantes, à recolha de dados e as opções tomadas na sua análise.

4.1. Opções metodológicas gerais

O principal interesse da investigadora, neste estudo, consiste em compreender que estratégias e procedimentos matemáticos usam os alunos na resolução de tarefas diagnóstico, cujas questões estão associadas à operação subtracção e ao conhecimento dos números. Assim, as opções metodológicas da investigadora enquadram-se nas características da investigação qualitativa. Considerando as características do estudo a realizar, este enquadra-se no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa. Adequa-se a um paradigma interpretativo na medida em que se pretende, essencialmente, descrever os procedimentos matemáticos usados pelos alunos e compreender em que níveis de cálculo e raciocínio se encontram.

Segue-se uma abordagem do tipo qualitativo, considerando as cinco características enunciadas por Bogdan e Biklen (1994). De facto, o interesse deste estudo relaciona-se com a compreensão dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas numéricas, uma das características apontadas por estes autores. Por outro lado, a fonte directa dos dados são os alunos e os dados são recolhidos próximo do ambiente natural dos alunos, neste caso na escola, sendo a investigadora o principal instrumento de recolha de dados.

Outras características da investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994) podem ser, também, encontradas neste estudo. Assim, os dados recolhidos são de natureza descritiva, incluindo produções escritas dos alunos relativas às tarefas propostas, notas de campo resultantes da observação das entrevistas e registos áudio das entrevistas de tipo clínico realizadas aos alunos, com resolução de tarefas numéricas, o que está de acordo com a característica descritiva da investigação qualitativa.

A análise dos dados é efectuada, de forma indutiva, a partir de situações particulares, tendo em vista uma percepção global de todo o processo, não considerando, à partida, a formulação de quaisquer hipóteses, característica seguida pela investigadora que analisa os dados de forma indutiva. Assim, as diferentes perspectivas de todos os intervenientes, perspectivas participantes, são fundamentais neste tipo de abordagem (Erickson, 1986).

4.2. Participantes

Os alunos intervenientes no estudo são alunos de uma escola básica do 1.º ciclo com jardim de infância do Pinhal Novo que está inserida num agrupamento vertical, constituído por uma escola de 2.º e 3.º ciclos e nove escolas de 1.º ciclo, algumas com jardim-de-infância. A escola onde foi implementado o estudo situa-se no centro da vila e curiosamente, embora neste momento já remodelada e ampliada, foi a escola onde a investigadora frequentou a 4ª classe (nomenclatura da época) no ano lectivo 1972/1973. Presentemente, funciona em horário duplo da manhã e da tarde, mantendo em funcionamento 10 turmas distribuídas pelos dois períodos de funcionamento e uma turma de pré-escolar em horário normal, dado o elevado número de alunos que comporta, funciona com alguma dificuldade de espaços para dedicar a tarefas extra-curriculares.

O estudo centra-se num conjunto de dezoito alunos, distribuídos por três níveis de ensino (2.º, 3.º e 4.º anos) e por três níveis de desempenho.

Para escolher as turmas em que estavam os alunos seleccionados adoptei como critério o facto de as professoras terem frequentado, pelo menos durante um ano, o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos.

Neste sentido, contactei as professoras que leccionavam 2.º, 3.º e 4.º anos da referida escola e pedi-lhes que seleccionassem dois alunos que consideravam ter mais dificuldades em Matemática - que passam a ser designados por nível baixo de desempenho, dois que consideravam ser alunos "médios" - que passam a ser designados por nível médio de desempenho e dois que consideravam com melhor desempenho na disciplina - designados por nível alto. Uma vez que o género (rapaz ou rapariga) não era critério de selecção, o número de raparigas e de rapazes é diferente. A investigadora pretendia apenas que não fossem alunos demasiado inibidos, para que a explicitação do pensamento não ficasse comprometida devido a essa característica dos alunos.

Na tabela seguinte indica-se o número de alunos seleccionado para o estudo:

Número de alunos seleccionados

Ano / Nível	2.ºano	3.ºano	4.ºano
Baixo (B)	2	2	2
Médio (M)	2	2	2
Alto (A)	2	2	2

Tabela 1 - Distribuição dos alunos por ano e nível de desempenho

4.3 Organização da recolha de dados

Do ponto de vista metodológico, o estudo inicia-se com uma fase de preparação da parte empírica, que consistiu na organização de tarefas diagnóstico a propor aos alunos nas entrevistas do tipo clínico.

No sentido de preparar a recolha de dados, iniciei os contactos com as professoras que leccionavam 2.º, 3.º e 4.º anos, que conhecia no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º ciclos (PFCM) do qual eu era formadora. Contactei pessoalmente os professores, dirigindo-me à escola onde leccionavam, expliquei-lhes o estudo que pretendia realizar, no âmbito da elaboração da dissertação com vista à obtenção do grau de mestre. Os contactos tiveram como objectivo o pedido de colaboração no estudo, através da selecção dos alunos a participar e sua disponibilização, com vista a recolher os dados necessários à realização do estudo. Todos os professores contactados responderam favoravelmente e mostraram disponibilidade para colaborar nos meus pedidos, aceitando "abrir" as suas salas de aula para eu falar com os alunos sempre que de tal sentisse necessidade.

Neste primeiro contacto, as professoras foram, ainda, informadas dos critérios de selecção dos alunos que pretendia (descrito no ponto relativo aos participantes). Também, desde logo, discutida a necessidade de enviar aos encarregados de educação, via alunos, um pedido de autorização para a respectiva recolha de dados, cuja elaboração ficaria à minha responsabilidade. Também elaborei, o pedido de autorização ao agrupamento de escolas, tendo-o entregue pessoalmente por escrito.

Antes de iniciar a recolha de dados fiz uma visita às turmas dos alunos que iriam participar, com a finalidade de lhes explicar o meu pedido de colaboração da sua parte, bem como a razão de não necessitar a colaboração de todos. Também pretendi estreitar os laços de proximidade com os alunos que iria entrevistar, para que no momento das entrevistas os alunos se expressassem mais à vontade. Não sendo possível fazê-lo só com esses alunos, em particular, fi-lo com a turma. Devo referir que senti, nesta visita, uma recepção muito acolhedora da parte dos alunos, talvez porque já me conheciam aquando das minhas visitas em contexto de sessões de acompanhamento de sala de aula do PFCM. Este encontro com os alunos na sala de aula ficou marcado (dia e hora), logo no primeiro encontro com as professoras.

Terminada esta fase preparatória iniciou-se a recolha de dados. Entre Dezembro 2008 e Janeiro 2009, foram efectuadas entrevistas do tipo clínico, a dezoito alunos distribuídos por 2.º, 3.º e 4.º anos e por três níveis de desempenho diferentes (Baixo, Médio e Alto) na disciplina de Matemática.

Nas entrevistas, os alunos resolveram tarefas, cujas questões se enquadram no tema "Números e operações" do Programa de Matemática, mais concretamente, associados à operação subtracção e ao conhecimento dos números.

4.4. Entrevistas

4.4.1 Fundamentação geral

Segundo Long & Ben-Hur (1991), a entrevista clínica no domínio da aprendizagem serve para fornecer elementos complementares para a avaliação, desenvolver conhecimento fundamental sobre as aprendizagens e concepções dos alunos e conhecer melhor os alunos e as suas aprendizagens com o fim de planificar e adaptar estratégias de ensino. Estes factores que contribuem para entender e melhorar o processo ensino/aprendizagem, bem como, fornecer conhecimento acerca das estratégias dos alunos na resolução de problemas, conceitos e concepções erradas, Long & Ben-Hur (1991). Nesta perspectiva, a utilização da entrevista clínica como instrumento de recolha de dados é o que melhor serve os propósitos do estudo em causa.

Foram realizadas entrevistas clínicas a dezoito alunos do 1.º ciclo (seis do 2.º ano, seis do 3.º ano e seis do 4.º ano) acompanhadas de resolução de tarefas numéricas escritas. As entrevistas foram, realizadas por mim no desempenho do papel de investigadora.

As tarefas que serviram de suporte às entrevistas foram adaptadas de Kraemer (2008) e seleccionadas de acordo com os dados indicados por este autor ao nível do desempenho que os alunos holandeses tiveram na sua resolução. Assim, as questões colocadas aos alunos nas entrevistas, basearam-se em questões calibradas (incluídas numa mesma escala de medida) e ordenadas a partir de respostas dadas por alunos holandeses.

4.4.2 Selecção das questões incluídas nas entrevistas

As questões incluídas nas entrevistas foram seleccionadas a partir de dados de desempenho de alunos holandeses de 2.º, 3.º e 4.º anos, em Janeiro.

Os gráficos 1, 2 e 3 resumem os dados relativos às respostas, respectivamente, dos alunos de 2.º, 3.º e 4.º anos a vinte e quatro questões.

De modo a explicitar o significado dos gráficos 1, 2 e 3, analiso em detalhe o gráfico relativo ao 2.º ano (Gráfico 1).

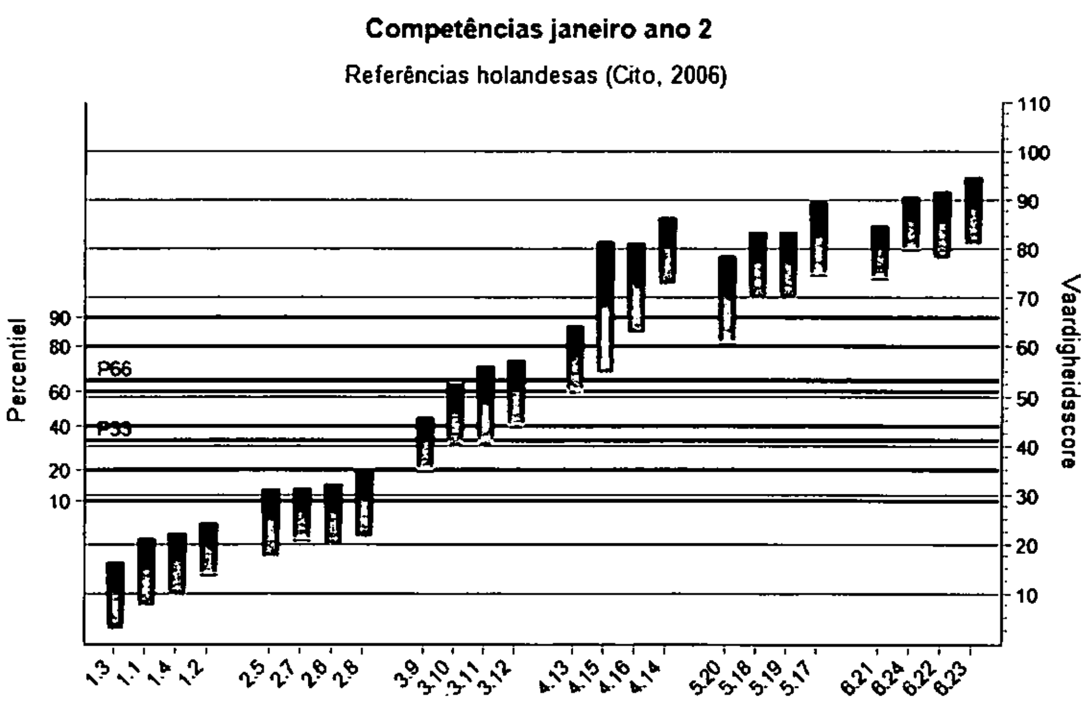


Gráfico 1 - Competências dos alunos Holandeses em Janeiro - 2.ºano

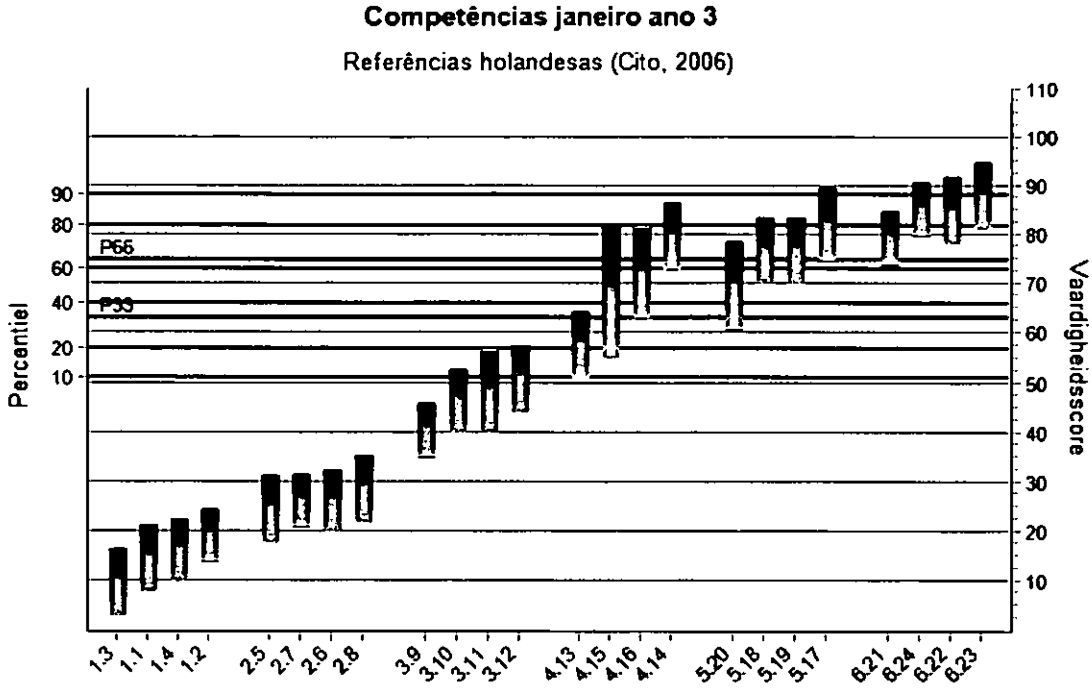


Gráfico 2 - Competências dos alunos Holandeses em Janeiro - 3.ºano

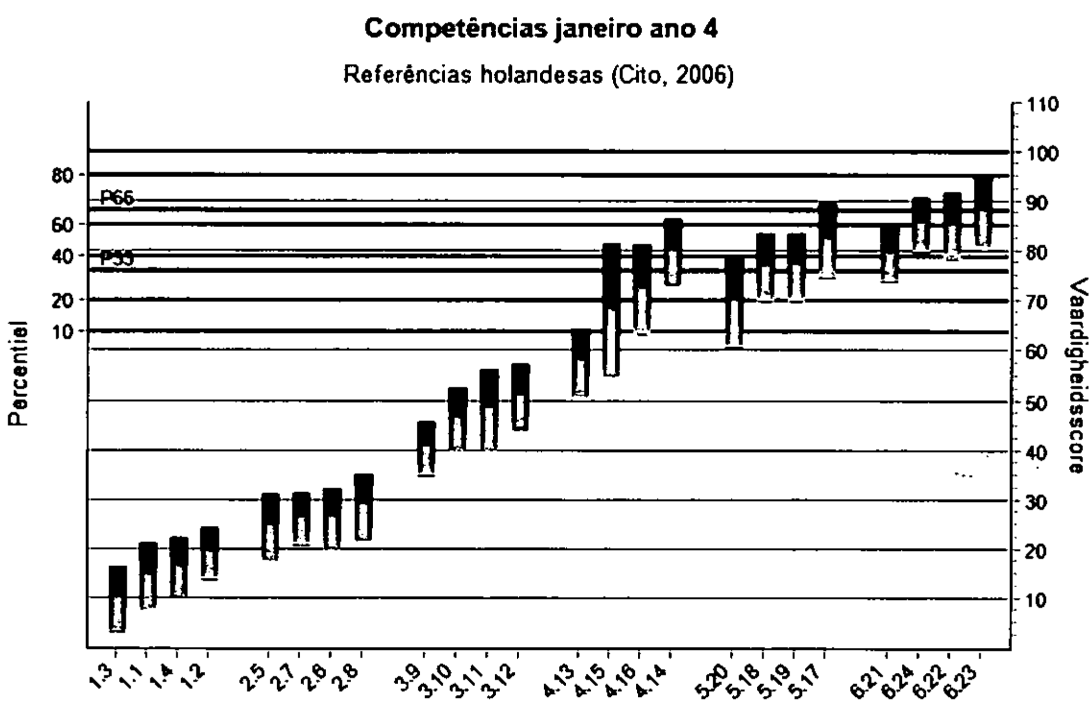


Gráfico 3 - Competências dos alunos Holandeses em Janeiro - 4.ºano

Os segmentos verticais representam a competência matemática que dá uma probabilidade de resolver correctamente a pergunta entre 50 a 80%. Por exemplo, um aluno do 2.º ano com competência 7, tem cerca de 50% de hipótese de resolver correctamente a questão 1.1, ao passo que um aluno com 20 de competência tem, aproximadamente, 80% de probabilidade de resolver a mesma questão (figura 3).

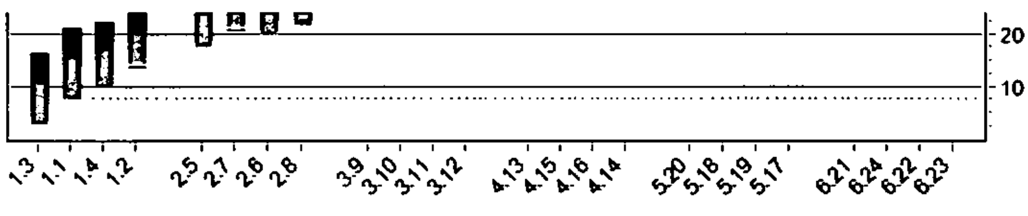


Figura 3.- Secção de gráfico a que se refere o exemplo

Cada entrevista é constituída por oito questões, organizadas em dois grupos de quatro questões cada, a que dei o nome de série. Cada série integra questões de dificuldade similar, incluindo questões referentes à compreensão da operação subtracção e outras relacionadas com o conhecimento dos números. Por exemplo, a série 1 é constituída pelas questões (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4). Por uma questão de simplificação estas perguntas foram numeradas de 1 a 4 e identificadas como integrando a série 1 como se pode ver no anexo 4.

As questões a incluir em cada entrevista foram organizadas em duas séries de nível de dificuldade crescente. Por exemplo as entrevistas do 2.º ano incluíram as séries 1 e 2 ou as séries 2 e 3 ou as séries 3 e 4. Na resolução da primeira série, os alunos têm uma probabilidade de, pelo menos, 80% de responder correctamente. Para responder à segunda série de questões, os alunos têm uma probabilidade de, pelo menos, 50% de responder correctamente.

A selecção do grupo de duas séries que constituíram cada entrevista foi realizada a partir da tabela de diferenciação seguinte:

Tabela de diferenciação

<table>
<tr><th>Teste</th><th>Nivel</th><th>Série 1</th><th>Série 2</th><th>Série 3</th><th>Série 4</th><th>Série 5</th><th>Série 6</th><th>Série 7</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2º Ano</td><td>B</td><td colspan="2">< 42</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M</td><td></td><td colspan="2">42 – 54</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td></td><td colspan="2">> 54</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">3º Ano</td><td>B</td><td></td><td></td><td colspan="2">51 - 63</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">63 - 75</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">> 75</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">4º Ano</td><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">< 76</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">76 - 88</td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">> 88</td></tr>
</table>

Tabela 2 - Tabela de diferenciação das perguntas

As séries seleccionadas para os alunos de nível de desempenho baixo de 2.º ano, correspondem a séries em que os alunos com competência inferior a 42 tinham uma probabilidade de sucesso superior a 80% - séries 1 e 2. As séries seleccionadas para os alunos de nível de desempenho médio correspondem a séries em que os alunos têm competência entre 42 – 54, com probabilidade de sucesso aproximada de 80% - séries 2 e 3. Para alunos de nível de desempenho alto, as séries seleccionadas - série 3 e 4 - correspondem a séries para alunos com competência superior a 54 e probabilidade de sucesso aproximada a 80%. Relativamente aos 3.º e 4.º anos (níveis de desempenho baixo, médio e alto) procedeu-se de igual forma.

Na tabela 3, resume-se a distribuição das séries de questões por ano de escolaridade e por nível de desempenho:

Séries por ano e nível de desempenho

Ano	Baixo	Médio	Alto
2.º	Séries 1 e 2	Séries 2 e 3	Séries 3 e 4
3.º	Séries 3 e 4	Séries 3 e 4	Séries 4 e 5
4.º	Séries 4 e 5	Séries 5 e 6	Séries 5 e 6

Tabela 3 - Organização das séries por ano de escolaridade e nível de desempenho

As entrevistas completas encontram-se no anexo 4 e estão identificadas de acordo com a organização descrita anteriormente - por ano de escolaridade, séries e nível de desempenho.

As questões que constituem as entrevistas estão numeradas de 1 a 24. Das quais, as 1, 4, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22 e 24 são questões relativas à compreensão da operação subtracção e as 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 17 e 23 são questões associadas ao conhecimento dos números.

4.4.3 Realização das entrevistas

As entrevistas realizaram-se em Dezembro de 2008 e Janeiro de 2009 e seguindo uma calendarização combinada entre a investigadora e as professoras das respectivas turmas, de modo a não coincidir em aulas onde as professoras tivessem planificado introduzir conceitos novos, a fim de não prejudicar os alunos, que iriam ser entrevistados, nos momentos de ausência na sala de aula.

Foi também previamente combinado com as professoras a sequência dos alunos que iriam fazer as entrevistas, permitindo que a investigadora não interrompesse periodicamente a aula, a fim de convidar o aluno seguinte a realizar a entrevista, possibilitando assim, o decurso normal da aula. Deste modo, quando o aluno entrevistado regressava à sala de aula, a professora já sabia qual o aluno que se seguia.

As entrevistas foram realizadas, na sua maioria, no espaço reservado ao gabinete da coordenadora, por ser mais recatado, embora se situasse entre duas salas de aula. Algumas entrevistas realizaram-se, no entanto, na biblioteca da escola, quando a referida sala estava ocupada.

A duração das entrevistas não foi exactamente a mesma com todos os alunos, pois dependeu, essencialmente, da rapidez das explicitações que davam. No entanto, posso dizer que, em média, as entrevistas tiveram a duração de 30 minutos cada uma.

As entrevistas foram registadas em áudio. Foi igualmente recolhida a resolução de tarefas escritas (em suporte papel) e registada pela investigadora a explicitação, por parte dos alunos, da sua forma de pensar.

No inicio das entrevistas era explicado, a cada aluno, a finalidade da mesma e as razões da sua gravação em áudio. A gravação e o questionamento começavam quando o aluno evidenciasse que se sentia pronto para iniciar o processo. Para resolverem as tarefas, os alunos, tinham canetas à disposição, o uso de canetas teve como intenção não se perder nada do que os alunos escrevessem e também tornar o processo de digitalização das suas produções escritas mais nítido. Sempre que os alunos se enganassem podiam riscar à vontade e essa possibilidade era acordada logo no inicio da entrevista.

A cada aluno era fornecido um conjunto com duas séries de tarefas (como se pode ver no anexo 4), no total com 8 questões cada um. O aluno era convidado a resolver por escrito cada questão e ao mesmo tempo explicar o seu pensamento, que ia sendo áudio gravado. Porém, houve alunos que preferiram registar primeiro e explicar depois.

Durante as entrevistas procurei demonstrar sempre uma atitude de curiosidade e não inquisitória, para que os alunos se sentissem mais descontraídos e conseguissem comunicar facilmente a sua forma de pensar. Para isso, o diálogo com os alunos no decorrer das entrevistas, teve como suporte frases do tipo:

- Ensina-me como fazes ...

- Mostra-me como fazes ...

- Mostra-me como sabes ...

- Mostra-me que é verdade ...

- Até aqui já sei fazer como tu e depois? És capaz de me explicar melhor?

Foram escolhidas estas frases/questões com características abertas, por permitirem aos alunos escolher a forma como querem responder e apelarem à reflexão dos seus processos de pensamento, de acordo com o que sugerem Long & Ben-Hur (1991) e Hunting (1997), em métodos de entrevista do tipo clínico.

4.5. Análise de dados

A informação a analisar é proveniente de diferentes fontes, sendo elas, as produções escritas dos alunos, as notas retiradas pela investigadora aquando da resolução das tarefas pelos alunos e explicitação da sua forma de pensar e as entrevistas de tipo clínico realizadas aos alunos.

Os dados recolhidos para análise apresentam-se em suporte papel, no caso das produções escritas das tarefas propostas aos alunos e as notas de campo recolhidas pela investigadora e em suporte áudio, as entrevistas integralmente gravadas.

A análise dos dados desenrolou-se em vários momentos. A primeira etapa, com características um pouco informais, compreendeu a leitura e audição dos dados provenientes dos diferentes suportes. Ou seja, a leitura atenta dos documentos produzidos pelos alunos e audição, individual, das gravações áudio com as explicitações da sua forma de pensar. De seguida, numa segunda etapa de organização de dados, conjuguei todos estes elementos e as informações provenientes das notas de campo num quadro, onde constam: (i) todas as questões respondidas pelos alunos; (ii) o ano de escolaridade e nível de desempenho correspondente a cada resposta; (iii) o registo escrito do aluno; (iv) o que a investigadora observou; (v) o que foi dito pelo aluno na explicação de como pensou; (vi) se acertou, errou ou não respondeu (anexo 5). Esta articulação de informação constitui o ponto de partida para a análise de dados de forma a perceber os níveis de raciocínio e de cálculo que se identificam nas resoluções dos alunos e quais as estratégias que os alunos usam, tal como sugere Bogdan e Biklen, (1994).
O registo de todos estes elementos foi feito, em simultâneo, a partir da audição das entrevistas gravadas, da leitura dos documentos escritos produzidos pelos alunos e das notas retiradas pela investigadora aquando da

resolução das tarefas pelos alunos e explicitação do seu modo de pensar. Saliento que as notas de campo serviram essencialmente para complementar e clarificar, nalgumas situações, os procedimentos que os alunos usaram na resolução das tarefas.

Seguiu-se uma leitura atenta da organização feita e identificação das estratégias usadas pelos alunos, na resolução dos problemas propostos, que teve como objectivo facilitar a análise dos dados. Nessa leitura identifico as diferentes estratégias, que os alunos usaram nas respostas às questões associadas à operação subtracção, caracterizo cada uma delas com exemplos recolhidos dos dados e identifico o tipo de erros mais frequentes. Para as questões associadas ao conhecimento dos números, os passos da análise de dados seguem a mesma sequência.

Para a analisar as estratégias usadas pelos alunos tive em conta a caracterização de Fuson et al. (1997a), de (Fuson, 1992), Beishuizen (1999) e de Thompson (1999). Entende-se por *contar*, as diferentes formas de contagem a que as crianças podem recorrer. *Contar a partir de*, quando a criança parte da contagem de uma das quantidades e continua a partir daí, até chegar ao total. *Contar para trás,* quando, em situações concretas de subtracção, faz contagens decrescentes, nuns casos a criança parte do aditivo e chega ao subtractivo, noutros casos, parte do aditivo e chega ao resto. *Contar até*, quando a criança parte do subtractivo e chega ao aditivo. Por *decompor* entende-se a *decomposição decimal,* onde os números são decompostos em dezenas e unidades e operados em separado. Beishuizen (1999) designa esta estratégia por (*1010*). Entende-se por *saltar*, o método em que as dezenas são contadas (para a frente ou para trás) a partir de um dos números sem o decompor, estratégia que este autor designa por (*N10*). Finalmente, as estratégias associadas a níveis mais elevados de raciocínio são denominadas por *factos conhecidos* e *factos derivados* (Fuson, 1992).

A leitura atenta dos dados e a sua análise permite igualmente identificar os erros cometidos pelos alunos, percebendo se eles dizem respeito a um engano ao nível do cálculo (erro de cálculo) ou se correspondem a uma dificuldade de compreensão conceptual (erro de conceito).

Para analisar a evolução organizo as estratégias que os alunos usam por ano e por níveis de desempenho (Baixo, Médio e Alto), procurando encontrar padrões que suportam a evolução. Concretamente, como os alunos evoluem nas estratégias que usam para resolver problemas de subtracção e como evoluem no conhecimento dos números ao longo dos 2.º, 3.º e 4.º anos.

5. Desempenho dos alunos

Neste capítulo apresento e analiso os dados recolhidos. Começo por identificar as diferentes estratégias que os alunos usam para resolver situações de subtracção. De seguida descrevo e interpreto essas estratégias bem como os erros mais frequentemente cometidos pelos alunos. Por fim analiso as estratégias dos alunos por nível de desempenho reflectindo sobre a sua evolução ao longo do 2.º, 3.º e 4.º anos.

Em relação às questões associadas ao conhecimento dos números a sequência da análise é idêntica. Assim, identifico e analiso as estratégias usadas, identifico os erros mais frequentes e relaciono as estratégias com o nível de desempenho dos alunos.

5.1. As estratégias usadas pelos alunos em questões de subtracção

A análise das respostas dos alunos questões de subtracção permite identificar o uso de estratégias referidas na literatura que a seguir especifico e analiso.

Contar

Oito alunos resolveram várias das questões apresentadas usando processos de contagem. Por exemplo Carlos, na questão 9 "O Bernardo tem 18 anos. O Sérgio tem 23. Quantos anos tem o Bernardo a menos?"

responde: "fiz do 23 até ao 18" e regista a sua resolução da seguinte forma:

"23| 22 21 20 19 18 o Bernardo tem menos 5 anos".

Podemos assim constatar que Carlos *contou para trás até* pois partindo do 23, contou um a um até ao 18. Partiu do aditivo e contou sequencialmente até ao subtractivo, sinalizando a contagem e escrevendo os números por ordem decrescente.

Uma outra aluna, Mafalda, resolve a mesma questão usando igualmente um processo de contar para trás. No entanto, usa os dedos para suportar a contagem decrescente, verbaliza: 22[1] (mostra 1 dedo), 21 (mostra 2 dedos), 20 (mostra 3 dedos), 19 (mostra 4 dedos), 18 (mostra 5 dedos). Regista a sua resolução da seguinte forma: "23 até chegar a 18. O Bernardo é mais novo do que o Sérgio 5 anos".

Mafalda, embora use o mesmo procedimento que Carlos, revela uma necessidade de concretização superior à que este parecia necessitar, uma vez que sinaliza a contagem no toque pelos dedos.

Outra aluna, Érica, usa o mesmo processo que Mafalda, faz: 23(1), 22(2), 21(3), 20(4), 19(5), 18(6). Regista 6.

Érica também *contou para trás até*, no entanto incorre no erro típico de considerar o aditivo um elemento de contagem. Este erro, que é identificado por Treffers e Buys (2001), quando os alunos se encontram ainda no nível de *Cálculo por contagem*, é apontado por Fuson (2003) como uma das dificuldades de contar para trás.

Finalmente, uma outra aluna, Gabriela, usa também uma estratégia de contagem, mas *conta para a frente até*:

"contei de 18 para 23", sinalizando a contagem da seguinte forma:

18 → 19(1), 20(2), 21(3), 22(4), 23(5).

No enunciado escreve "O Bernardo é 5 anos mais novo do que o Sérgio"

---

[1] A partir daqui a explicitação deste procedimento será referenciada como: 23 → 22(1), 21(2), 20(3), 19(4), 18(5), ...

Note-se que Gabriela usa a forma *Contar para a frente até*, uma contagem sequencial para a frente que resolve com mais facilidade uma situação de cálculo relacionada com a operação subtracção.

As estratégias anteriormente apresentadas foram usadas na resolução das questões 1, 4, 8, 9 e 12, a que responderam quatro alunos.

No quadro seguinte resumo as diferentes formas de *contar* a que os alunos recorreram:

Formas de *contar*

Questões [2] / Estratégias	1	4	8	9	12
Contar para trás até				3	
Contar para a frente até		1	1	4	1

Tabela 4 - Resumo das formas de *contar*

A análise da tabela sugere que os alunos, mesmo em situações que envolvem a operação subtracção, usam com mais frequência estratégias de contagem para a frente, como refere Fuson et al. (1997a).

Na resolução destas questões identificam-se diferentes tipos de erros cometidos pelos alunos. Alguns repetem os números e portanto contam-nos mais do que uma vez. Outros, como Érica, cometem o erro típico de contagem identificado na literatura, que consiste em considerar o aditivo um elemento de contagem, assinalado por Fuson (2003) como uma dificuldade de contar para trás.

Finalmente, dois alunos, cometem erros associados à não compreensão do problema. Apresento, como exemplo desta situação, a resposta de Inês à questão 8

[2] As restantes questões de subtracção não foram colocadas na tabela porque não se verificaram processos de contagem na sua resolução.

Treze coelhos vivem nesta cerca. Os que não vês dormem nas tocas. Quantos coelhos estão a dormir?

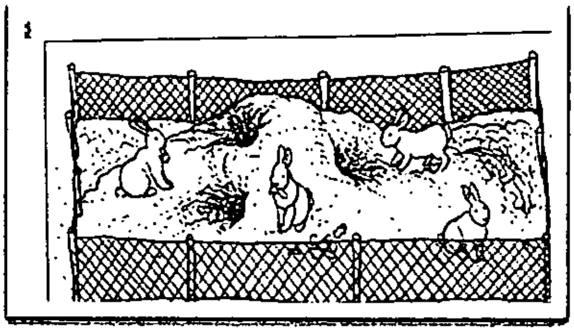


Figura 4 - A questão 8

Inês responde "3" e explicita "porque estão 3 buracos".

Inês revela não ter compreendido o problema ao nível do conteúdo, não tendo em conta a quantidade inicial envolvida e associando, aparentemente, uma toca a um coelho. Por isso, como via 3 tocas (a que chamou buracos), deu a resposta 3.

Saltar

Na resposta às questões, só dois alunos usaram a estratégia *saltar até*. Por exemplo, Gonçalo, na questão 8[3], responde: "vou pôr 3 aqui [aponta com o dedo para uma toca] e dá 7 e aqui vou pôr também 3 [aponta para outra toca] e fica 10 e vou pôr mais 3 aqui [aponta para outra toca] dá 13, então os coelhos das tocas são 3+3+3=9"

Gonçalo, na resolução da situação parte do 4 - número de coelhos visíveis na imagem e associa 3 coelhos a cada toca. Assim, Gonçalo partiu de 4 (sem o decompor), deu saltos de 3 em 3 para a frente (adiciona) até chegar a 13. Não perdendo de vista os saltos de 3 que deu, correspondendo ao número de tocas.

Outra aluna, Mafalda, na questão 12, usa o mesmo procedimento que Gonçalo, contudo, dá saltos de 10 e de 5.

Questão 12- A Inês guarda 50 selos na caixa. Ela tem 25 selos na gaveta da Espanha. Quantos selos tem na gaveta de Portugal?

Mafalda responde: "É 25 para 50 e 25

[3] A imagem e respectivo texto associados à questão 8 podem ver-se na figura 4.

contei 10 e dá 35 depois contei mais 10 dá 45 e mais 5 dá 50. Vai ser 10+10+5=25".

Regista a sua resposta da seguinte forma:

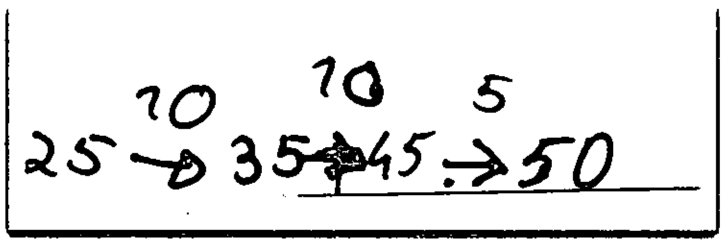


Figura 5- Resolução de Mafalda na questão 12

Mafalda, parte do 25, dá dois saltos de 10 para a frente e chega a 45, depois dá um salto de 5 e chega a 50.

Note-se que a aluna, ajusta os saltos à ordem de grandeza dos números envolvidos, ou seja, dá saltos de 10 partindo do 25 até 45. Além disso, articula os saltos à diferença entre o subtractivo e o aditivo, o que envolve saltos de tamanhos diferentes. Por isso, como pretende chegar a 50, do 45 dá um salto de 5.

Ambos os alunos usam a estratégia dando saltos para a frente, para adicionar. Ou seja, partem do subtractivo, sem o decompor, e chegam ao aditivo. Na resolução das questões não se identificam erros no uso da estratégia *saltar até*.

Decompor

Gonçalo e Raquel são os únicos alunos a usar estratégias de decomposição.

Gonçalo, usa a decomposição como estratégia de resolução na questão 12. Este aluno responde: "É para dar 50, tenho que fazer contas de 25 até 50". [Pensa e diz]: "e aqui eu ponho 25" [pensa] "é 25 porque 2+2, 4 e 5+5, 10 aqui faz-se 20+20, 40 e 40+10, 50".

Na sua resolução, Gonçalo, encontra a diferença entre 50 e 25, pensando quanto vai de 25 para 50. Esta forma de pensar reflecte o sentido completar da operação subtracção.

Confirma que 25+25 é 50, decompondo o 25 em 20+5 (dezenas e unidades), de seguida opera as dezenas, 20+20 é 40 e em separado opera as unidades, 5+5 é 10. Depois junta tudo, 40+10 é 50.

Note-se que o aluno usa a *decomposição decimal,* tal como é caracterizada na literatura, em Fuson et al. (1997a) e Thompson (1999), pois, decompõe os dois números em dezenas e unidades, adiciona as dezenas e unidades em separado e depois junta tudo.

Outra aluna, Raquel, na questão 19, responde da seguinte forma:

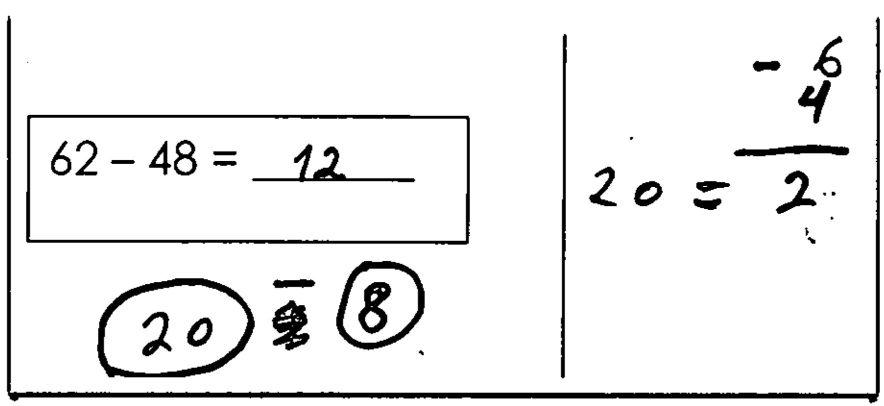


Figura 6 – Resolução de Raquel na questão 19

Raquel, explicita: "Comecei pelas dezenas, do 4 para o 6 vão 2, fica 20. Como o valor das unidades é superior tenho de tirar 8, 20-8=12 porque 12+8=20".

Raquel ao encontrar a diferença entre 6 e 4 tinha a noção de que estava a operar na ordem das dezenas, o que significa que tem o sentido do valor posicional dos algarismos nos números.

Embora o resultado esteja errado, pois, a aluna esqueceu que tinha ainda as duas unidades do 62 para operar, a sua resolução revela um bom nível de estruturação de pensamento e flexibilidade de cálculo.

Cálculo Relacional

Nas suas respostas, quatro alunos estabelecem relações entre os números. Por exemplo, Ruben na questão 1-"Imagina que a mãe vai fazer um bolo. Ela tinha uma caixa com 10 ovos e já partiu 6. Quantos ovos não foram utilizados?"

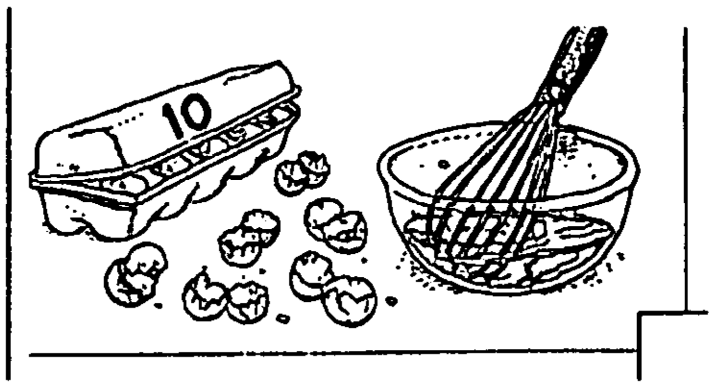


Figura 7- Imagem que ilustra o contexto da questão 1

Ruben mostra as duas mãos abertas, deixa levantados 5 dedos de uma mão e um dedo da outra e conta, um a um, os quatro dedos em baixo. Explicita: "assim fica 6 - 5 +1 é 6 e aqui estão mais 4, 6+4 são 10". Regista 4.

Podemos observar que Ruben estrutura o 10 em 5+5 e depois redistribui a quantidade 10 em 6+4, com a ajuda da visualização dos dedos das mãos.

Outra aluna, Raquel, na questão 14, explicita o seu raciocínio da seguinte forma:

> "Tirei o 1 do 81 [mostra com o indicador levantado] e meti na mão, para não esquecer, depois contei de 10 em 10 para trás até 60 e juntei o 1, até aqui fica 21 e do 58 até 60 vão 2, então juntei o 2 ao 21 e ficou 23".

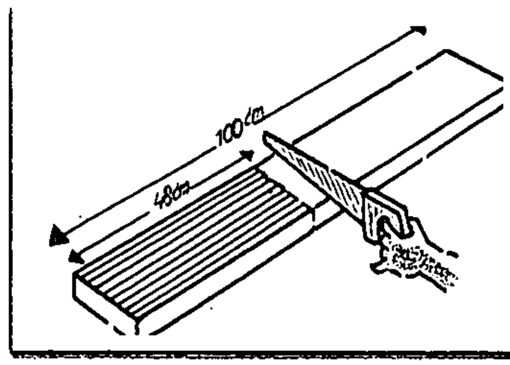
Estas calças agora estão mais baratas. Quantos euros menos?

Figura 8 - A questão 14

Raquel, decompõe o 81 (o aditivo) em 80-1, a unidade resultante da decomposição junta ao valor obtido a partir de contagens decrescentes do 80 até 60 - um valor próximo do subtractivo. Compõe, de seguida, a diferença com o valor que falta para chegar a 58 (o subtractivo). Deste modo, redistribui os números de forma a tornar o cálculo mais flexível.

A mesma aluna, na questão 16 responde: "Se partisse o 100 [comprimento da tábua] ao meio ficava com 50 cm, a outra parte fica com 48+2 então os 2 cm vão juntar aos outros 50 cm e fica 52 cm, o desenho ajudou".

Raquel, compara a metade de 100 com 48 e redistribui as 2 unidades de diferença entre 48 e 50, para a outra metade. Isto significa que estabelece relações entre os números e redistribui-os de forma a permitir-lhe um cálculo flexível e "inteligente".



Serras uma tábua e uma parte fica com 48cm. Qual é o comprimento da outra parte?

Figura 9 – A questão 16

Finalmente, uma outra aluna, Rute, resolve a mesma questão de outra forma mostrando igualmente o uso de relações numéricas. Rute explica: "imaginei a outra parte a ser igual, então 48+48 dá 96, mais 4 dá 100, então a outra parte tem 48+4=52".

Rute, duplica o 48, vê quanto falta para 100 (o todo) e relaciona essa quantidade como sendo, o que junta ao 48 para formar a outra parte.

Na questão 18, Raquel, volta a usar o mesmo tipo de raciocínio que usou na questão 14.

Este ferry-boat pode transportar 250 automóveis. 189 já estão no ferry. Quantos automóveis podem ainda entrar?

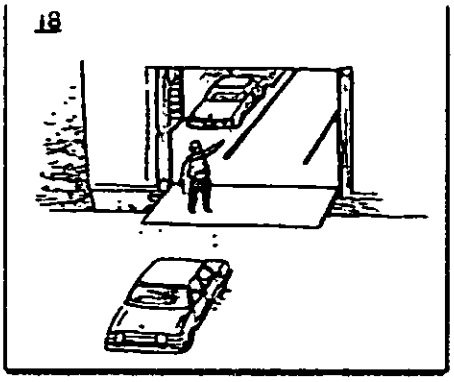


Figura 10 – A questão 18

E diz:

> "quando o algarismo das unidades é o 9 eu faço sempre da mesma maneira; meti um 1 no 189 e fica 190, que é um número redondo e fica mais fácil; para o 200 são 10, só falta 50 para 250, então 50+10 dá 60 juntei o 1 e deu 61"

A Raquel, para resolver as situações relaciona e redistribui os números de forma mais conveniente e "inteligente".

As estratégias anteriormente apresentadas foram usadas na resolução das questões 1, 12, 14, 16 e 18, a que responderam catorze alunos. No quadro seguinte resumo as respostas a questões de subtracção em que os alunos recorreram ao uso de *Cálculo Relacional*:

Cálculo relacional

Questões [4] / Estratégias	1	4	8	9	12	14	16	18	24
Cálculo relacional	1	-	-	-	1	2	2	1	1

Tabela 5 - Resumo das formas de *cálculo relacional*

[4] As restantes questões de subtracção não foram colocadas no quadro porque não se verificaram processos de *cálculo relacional* na sua resolução.

A análise da tabela sugere que as questões de subtracção onde os alunos usaram com mais frequência a estratégia de *cálculo relacional*, foram a 14 e a 16, correspondendo a respostas de alunos, predominantemente, do terceiro ano de escolaridade. No entanto, também se identificou *cálculo relacional* logo na primeira questão, correspondendo à resposta de um aluno dos primeiros anos e de nível de desempenho baixo.

As situações de *cálculo relacional* que surgiram mostram que estes alunos relacionam de forma inteligente os números, o que reflecte algum desenvolvimento de cálculo flexível.

No uso da estratégia de cálculo relacional identifica-se um tipo de erro, na questão 14. A aluna, Rute, responde: "Tira-se 1 do 81 para o 58, fica 59 e 50 para 80 é 30 e mais 9 dá 39".

Rute começa por fazer uma decomposição adequada do número, mas não sabe usar a decomposição associada à operação subtracção.

Usar factos conhecidos

Apenas uma aluna, Gabriela, recorre ao uso de factos conhecidos ou automatismos adquiridos anteriormente.

Esta aluna, na questão 12, responde, "fiz 25+25, já sei que 25+25 é 50".
A aluna tinha automatizado que 25+25=50 que aplica como um facto conhecido.

Algoritmo

Na resolução dos problemas de subtracção, doze alunos em quarenta e uma respostas usam o *algoritmo*, pelo que, alguns usam frequentemente. Embora muitos o tenham usado correctamente, nem sempre tal aconteceu. Identificam-se essencialmente dois tipos de erros nas respostas. Por exemplo na questão 14, Ricardo, responde da seguinte forma:

Ricardo, calcula mal a diferença entre sete e cinco, pois não conta com o transporte.

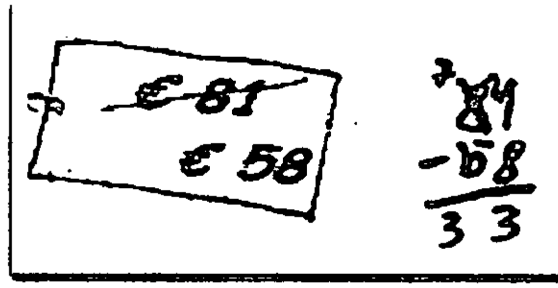


Figura 11- Resolução de Ricardo na questão 14

Na mesma questão, Teresa, responde:

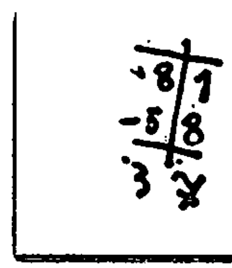


Figura 12 - Resolução de Teresa na questão 14

A aluna, na ordem das unidades, de 8 tira 1 e fica 7; repete o procedimento na ordem das dezenas, de 8 tira 5 e fica 3. Ou seja, independentemente dos algarismos pertencerem ao aditivo ou ao subtractivo retira sempre o de menor valor ao de maior valor absoluto. Teresa, comete um erro típico de algoritmo de subtracção, designado como erro de conceito.

Outras respostas

No conjunto dos dados, nas respostas de sete alunos, identificam-se outras resoluções que não se enquadram nas estratégias mais comuns e nas categorias consideradas. Indico exemplos relativos às respostas de Ricardo e Mafalda.

Ricardo, na questão 12, responde: "20 mais qualquer coisa dá 50, então 30+20 fica 50, tenho que juntar algum número para dar 50 e 30+20 dá 50".

Ricardo, decompõe o 50 em 30+20. O aluno estabelece, assim, uma relação a respeito do 50, embora não seja ajustada à situação proposta.

Finalmente, Mafalda na questão 16, responde:

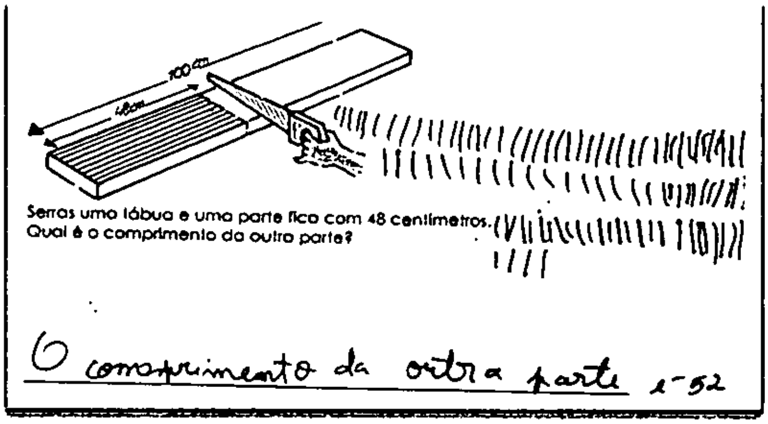


Figura 13 - Resolução de Mafalda na questão 16

Mafalda usou a estratégia de fazer 100 risquinhos, contou os primeiros 48 risquinhos um a um. A seguir contou os restantes, também um a um [observado pela investigadora] e diz que são 52. Este processo de resolução revela um nível de estruturação muito baixo, equivalendo ao primeiro nível de contagem, que corresponde à contagem de objectos um a um, identificado por Fuson et al. (1997 a).

Síntese

Na tabela seguinte resume-se o tipo de estratégias, usadas pelos alunos, nas questões de subtracção e se resolvem ou não correctamente as respostas.

Tabela global de respostas:

Questões / Estratégias	1	4	8	9	12	14	16	18	19	20	21	22	24
Contar		1	1	7	1								
Saltar			1		1								
Decompor					1				1				
Cálculo Relacional	1				1	2	2	1					1
Usar factos conhecidos					1								
Algoritmo					1	6	1	7	7	8	4	4	3
Outras	1		1		2	2	5						
Acertou	1	1	2	5	4	3	3	6	7	7	2	3	3
Errou	1		1	2	4	7	5	2	1	1	2	1	1
Não respondeu		1	1	1			2						
Total respostas	2	2	4	8	8	10	10	8	8	8	4	4	4

Tabela 6 - Resumo global das respostas

Na globalidade, os alunos usam como estratégias de cálculo na resolução de problemas de subtracção, *contar, saltar, decompor, cálculo relacional*, *usar factos conhecidos* e *algoritmo*. A análise da tabela aponta a existência de dois pólos extremos, no uso de estratégias, o contar e o uso de algoritmo. Sendo, o *contar* uma estratégia com nível de sofisticação baixo e o *algoritmo* de nível alto e formal.

As estratégias de nível intermédio de sofisticação são pouco usadas. Isto pode ser interpretado como decorrente de um ensino que valoriza o uso de algoritmos e que não trabalha suficientemente o uso de estratégias de cálculo mental como o *saltar, decompor* e *relacionar*.

O algoritmo é a estratégia mais frequente que emergiu no conjunto das respostas a partir da questão 14 (ver tabela 6), usada predominantemente por alunos do quarto ano de escolaridade.

Saltar, decompor e *usar factos conhecidos* correspondem a resoluções de alunos do segundo ano nível médio e terceiro ano nível baixo. A decomposição usada é a mais comum - a decomposição decimal.

Verifica-se o uso de *cálculo relacional* na primeira questão, correspondendo à resposta de um aluno do segundo ano de nível de desempenho baixo. As restantes respostas são, predominantemente, de alunos do terceiro ano de escolaridade. Os alunos que usaram *cálculo relacional* neste nível de ensino mostram que manipulam de forma inteligente os números e denotam o desenvolvimento de cálculo flexível.

Um olhar global sobre os erros cometidos pelos alunos nas suas resoluções, indicam que as questões com maior frequência de erros são a 12, a 14 e a 16, questões que envolvem um nível de abrangência muito elevado. Ou seja, abrangem alunos desde o segundo ano e nível de desempenho alto a alunos do quarto ano e nível de desempenho baixo. A estratégia de cálculo algorítmico é a que parece conduzir a mais respostas erradas. Das 41 respostas contabilizadas, 12 estão erradas (cerca de 29%), sendo os erros tanto de cálculo como de conceito.

5.2. As estratégias dos alunos e o nível de desempenho em questões de subtracção

A partir das produções escritas dos alunos nas questões de subtracção, analiso em que estratégias incidem as suas respostas, bem como a evolução do seu nível de "sofisticação" à medida que evolui o nível de desempenho dos alunos (do nível baixo ao nível alto) em cada ano de escolaridade.

As respostas dos alunos de 2.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões de subtracção, por níveis de desempenho.

2.º ano – nível baixo

Questões / Estratégias	1	4	8
Contar para trás até			
Contar para trás a partir de			
Contar para a frente até		1	1
Saltar			
Decompor			
Cálculo relacional	1		
Outras respostas	1		
Acertou	1	1	1
Errou	1		
Não responde		1	1

Tabela 7 - Resumo das respostas do 2.º ano-B

2.º ano – nível médio

Questões / Estratégias	8	9	12
Contar para trás até			
Contar para trás a partir de			
Contar para a frente até		1	
Saltar	1		
Decompor			1
Cálculo relacional			
Outras respostas	1		1
Acertou	1		1
Errou	1	1	1
Não responde		1	

Tabela 8 - Resumo das respostas do 2.º ano-M

2.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	9	12	14	16
Contar para trás até	1			
Contar para trás a partir de				
Contar para a frente até	1			
Saltar				
Decompor				
Cálculo relacional		1		
Algoritmo		1	1	
Outras respostas			1	1
Acertou	1	1		
Errou	1	1	2	1
Não responde				1

Tabela 9 - Resumo das respostas do 2.º ano-A

Acertou	Errou	Não respondeu
2B – 3	2B – 1	2B – 2
2M – 2	2M –3	2M –1
2A - 2	2A - 5	2A - 1

Tabela 10 - Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 2.º ano

No 2.º ano, predomina o uso de estratégias de contagem, contudo não deixam de existir situações de uso de decomposição, dar saltos e cálculo relacional, menos frequentes. O algoritmo já é usado em duas respostas embora sem sucesso.

Nos níveis de desempenho mais baixos, os alunos usam com frequência a contagem para a frente como estratégia para subtrair, no nível alto usam estratégias formais e de elevado nível de "sofisticação".

Nos níveis de desempenho médio e alto usam outras formas de resolução que categorizei como outras respostas, mas com pouco sucesso. O que poderá ser sinal de tentativas de resoluções que se enquadrem num nível mais estruturado, mas que ainda não são muito sólidas.

Um olhar sequencial pelos níveis de desempenho, no segundo ano, mostra que o nível de sofisticação das estratégias usadas pelos alunos evolui com o nível de desempenho dos alunos. O mesmo acontece com o número de respostas erradas às questões. Assim, o uso de procedimentos mais formais parece estar relacionado com a maior frequência de erros.

As respostas dos alunos de 3.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões de subtracção, por níveis de desempenho.

3.º ano – nível baixo

Questões / Estratégias	9	12	14	16
Contar para trás até	2			
Contar para a frente até		1		
Saltar		1		
Decompor				
Cálculo relacional				
Algoritmo			1	
Outras respostas			1	1
Acertou	2	1	1	1
Errou		1	1	
Não responde				1

Tabela 11 - Resumo das respostas do 3.º ano-B

3.º ano – nível médio

Questões / Estratégias	9	12	14	16
Contar para trás até				
Contar para a frente até	2			
Saltar				
Usar factos conhecidos		1		
Cálculo relacional				
Algoritmo			2	
Outras respostas		1		2
Acertou	2	1	1	
Errou		1	1	2
Não responde				

Tabela 12 - Resumo das respostas do 3.º ano-M

3.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	14	16	18	19	20
Contar					
Saltar					
Decompor				1	
Cálculo relacional	2	2	1		
Algoritmo			1	1	2
Outras respostas					
Acertou	1	2	2	1	2
Errou	1			1	
Não responde					

Tabela 13 - Resumo das respostas do 3.º ano-A

Acertou	Errou	Não respondeu
3B – 5	3B – 2	3B – 1
3M – 4	3M –4	3M – 0
3A - 8	3A - 2	3A - 0

Tabela 14 - Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 3.º ano

No nível baixo do terceiro ano, há alunos que ainda usam estratégias de contagem e os restantes usam estratégias que se distribuem entre saltar, algoritmo e outras menos comuns.

O nível de desempenho médio do terceiro ano mostra uma evolução lenta para uso de estratégias mais sofisticadas. Contudo, é no nível de desempenho alto que se verifica o abandono da contagem como estratégia de resolução e uma concentração no uso de cálculo relacional e algorítmico. O número de respostas certas é significativo neste nível.

Globalmente, no 3.º ano, as estratégias usadas são variadas, contudo a contagem tem ainda algum peso nos níveis mais baixos. O algoritmo é a estratégia mais usada com um grau de sucesso aceitável.

De salientar, no nível de desempenho alto o uso de cálculo relacional como estratégia de resolução, com um grau de erro pouco significativo (das cinco respostas com uso de cálculo relacional, quatro estão certas). Parece haver uma relação estreita entre o uso de cálculo relacional e a diminuição de erros.

As respostas dos alunos de 4.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões de subtracção, por níveis de desempenho.

4.º ano – nível baixo

Questões / Estratégias[5]	14	16	18	19	20
Algoritmo	2	1	2	2	2
Outras respostas		1			
Acertou			1	2	2
Errou	2	2	1		
Não responde					

Tabela 15 - Resumo das respostas do 4.º ano-B

4.º ano – nível médio

Questões / Estratégias	18	19	20	21	22	24
Algoritmo	2	2	2	2	2	1
Cálculo relacional						1
Outras respostas						
Acertou	1	2	1		1	1
Errou	1		1	2	1	1
Não responde						

Tabela 16 - Resumo das respostas do 4.º ano-M

[5] As estratégias *Contar, Saltar, Decompor* e *Cálculo relacional* não constam dos quadros a partir do 4.º ano, uma vez que não se identificaram nos processos de resolução dos alunos.

4.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	18	19	20	21	22	24
Algoritmo	2	2	2	2	2	2
Outras respostas						
Acertou	2	2	2	2	2	2
Errou						
Não responde						

Tabela 17 - Resumo das respostas do 4.º ano-A

A análise das respostas do 4.º ano sugere que as estratégias usadas pelos alunos se centram em torno do uso do algoritmo. O cálculo relacional é usado apenas uma vez, no nível de desempenho médio. Embora a estratégia preferida seja o algoritmo, ela só é usada sem erros pelos alunos de nível alto de desempenho.

Acertou	Errou	Não respondeu
4B - 6	4B - 4	4B - 0
4M - 6	4M - 6	4M - 0
4A - 12	4A - 0	4A - 0

Tabela 18 – Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 4.º ano

Estes dados sugerem que o uso correcto do algoritmo, contrariamente ao que se considera habitual, se reveste de dificuldades sobretudo para os alunos com nível de desempenho baixo.

Evolução das estratégias de subtracção

A tabela seguinte resume o tipo de estratégias usadas pelos alunos no 2.º, 3.º e 4.º anos por níveis de desempenho, em questões de subtracção.

Tabela global de estratégias usadas pelos alunos

Estratégias / Anos	Níveis	Contar	Saltar	Decompor	Usar factos conhecidos	Cálculo relacional	Algoritmo	Outras respostas
2.º ano	B	2				1		
	M	1	1	1				2
	A	2				1	2	2
3.º ano	B	3	1				1	2
	M	2			1		2	3
	A			1		5	4	
4.º ano	B						9	1
	M					1	11	
	A						12	

Tabela 19 - Resumo das estratégias usadas pelos alunos por níveis de desempenho

Uma análise global das estratégias usadas pelos alunos para resolver as questões de subtracção mostra uma nítida concentração de estratégias em dois pólos extremos. Um, centrado no uso de estratégias de baixo nível de "sofisticação", concretamente o uso de contagens, e outro centrado no cálculo algorítmico. Esquematiza-se a ideia subjacente a esta evolução na figura 14.

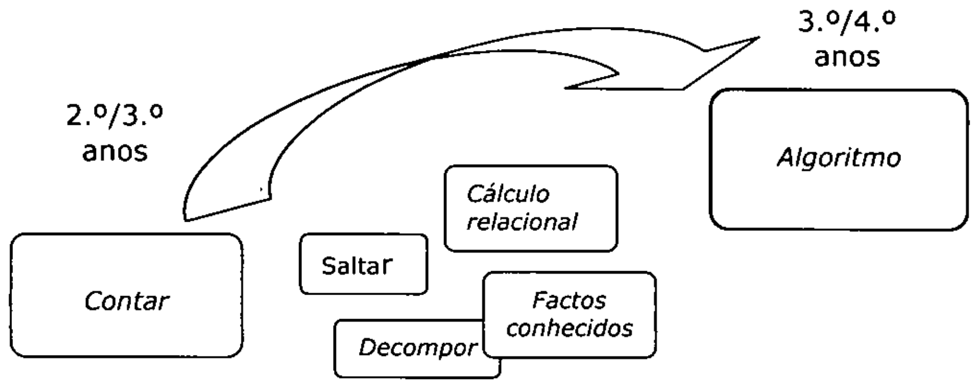


Figura 14 - Esquema que ilustra a evolução das estratégias de subtracção

As contagens repartidas entre o *Contar para a frente até* e *Contar para trás até*, são usadas por alunos de 2.º ano e 3.º ano até ao nível médio de desempenho. O cálculo algorítmico é usado com frequência a partir do 3.º ano, nível médio.

As estratégias de nível intermédio de "sofisticação" como o *saltar*, *decompor* e uso de *factos conhecidos* são pouco usadas e deixam de ter representatividade nas respostas dos alunos a partir do 3.º ano nível médio. Isto pode ser interpretado como decorrente de um ensino centrado em estratégias pouco "sofisticadas" nos primeiros anos de escolaridade, com uma passagem "quase" directa para uso de estratégias de elevado nível de "sofisticação" e em que o ensino de estratégias de cálculo mental de nível intermédio, como o *saltar*, *decompor* e *relacionar* não é muito significativo. Entre o nível médio do 2.º ano e o nível médio do 3.º ano, as "outras respostas" têm alguma relevância. Estas podem ser formas que os alunos encontram para responder de acordo com o seu nível de raciocínio, tentando ir um pouco mais além que estratégias informais e que ainda não conseguem ter capacidade de abstracção suficiente para usar as estratégias formais.

A análise mostra que são os alunos de nível de desempenho alto, que usam as estratégias de nível de estruturação mais elevado.

5.3. Desempenho dos alunos nas questões sobre conhecimento dos números

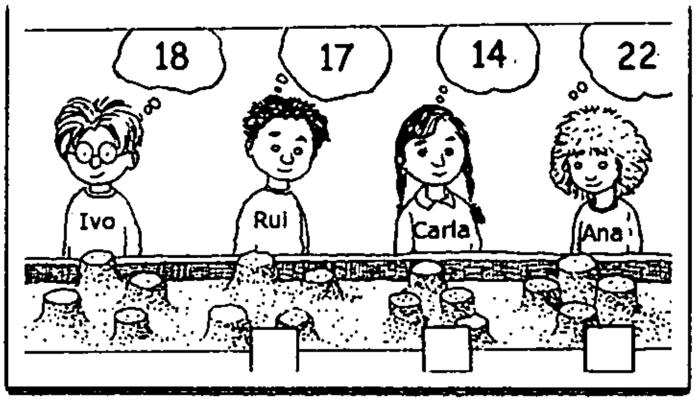
A partir da análise às produções escritas dos alunos e das transcrições dos registos áudio das justificações que davam para as suas respostas, foram identificadas várias formas globais de estruturar e relacionar os números que evidenciam o tipo de conhecimento que os alunos têm destes. Assim, especifico em seguida os conhecimentos usados pelos alunos nas questões relativas a estes aspectos.

Conhecimento sequencial dos números

Dois alunos resolveram várias questões onde mostraram o conhecimento que têm dos números, recorrendo à contagem sequencial. Por exemplo Ruben, na questão 3, responde 8 e explicita a sua resposta:

"Então, 15(1), 16(2), 17(3), 18(4), 19(5), 20(6), 21(7), 22(8)" .

Ruben recorreu à contagem sequencial [apoiando-se nos dedos] para estabelecer a relação entre 15 e 22.



A Ana fez 22 bolos de areia. A Carla fez 14. Quem fez menos? Quantos menos?

Figura 15 - A questão 3

Conhecimento sequencial usando saltos de 10

No conjunto das respostas, dez alunos reconheceram os números numa estrutura organizada de dez em dez.

É o caso de Érica na questão 10:

escreve, 65 ~~56~~ 68.

Quando explica o porquê da escolha dos números, diz:

> *Érica:* 65 porque está entre 60 e 70 e 65 também não passa de 70 nem é menos que 60.
>
> *Investigadora*: Porque é que o 56 pode ser?
>
> *Érica:* 56 não é! [e risca o 56]
>
> *Investigadora: Porquê?*
>
> *Érica: fica entre estes [aponta, com o dedo, para o espaço entre 50 e 60].*
>
> *Investigadora: E o 68?*
>
> *Érica: 68* não passa de 70.

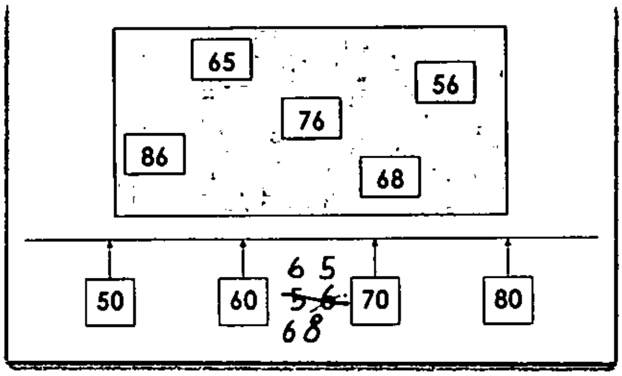


Figura 16 – Resposta de Érica na questão 10

Érica, localiza os números envolvidos no intervalo de dez unidades. Estabelece as dezenas certas como balizas, inferior e superior e as restantes unidades enquadra-as entre estes.

Outra aluna, Teresa, na questão 11, também reconhece os números numa sequência de 10 em 10.

> A D. Fátima entrega todos os dias, canetas, cadernos, giz e outras coisas que os professores necessitam na sala de aula. Hoje tem que levar 34 canetas para a sala da prof. Joana.
> Como pode ela pegar, rapidamente, em 34 canetas do armário? Quantas caixas e quantas canetas?
> E em 45?

A aluna responde de forma escrita, como se visualiza na figura 17 e explica:

"Eu acho que 10 mais 10, 20 e mais 10, 30; tirava 3 caixas. E precisa de levar 4 canetas".

A explicação para o 45 é idêntica:

"Tem que ser 10 mais 10, 20 e mais 10, 30 e mais 10, 40; levava 4 caixas e precisava de levar mais 5 canetas".

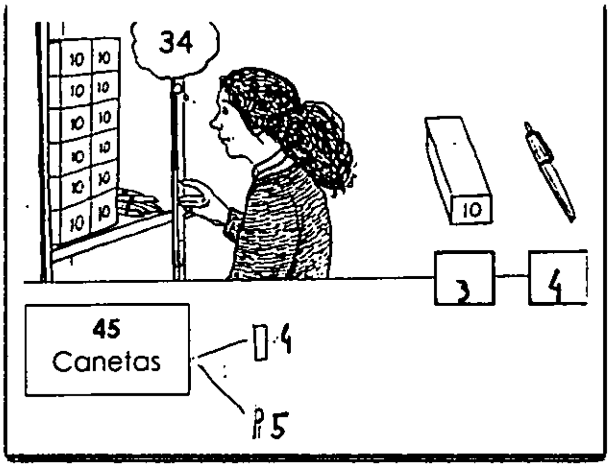


Figura 17 – Resposta de Teresa na questão 11

Teresa, para chegar a 34, dá saltos sequenciais de 10 em 10 até 30 e mais 4 unidades. Da mesma forma, para o 45 salta de 10 em 10 até 40 e acrescenta 5 unidades.

Alguns alunos cometem erros de contagem na localização dos números na linha numérica, como por exemplo a Ana na questão 15:

Assinala o 87 e explica: "Contei 100, 90, 80 pelos risquinhos, vi que era um bocadinho atrás do 80".

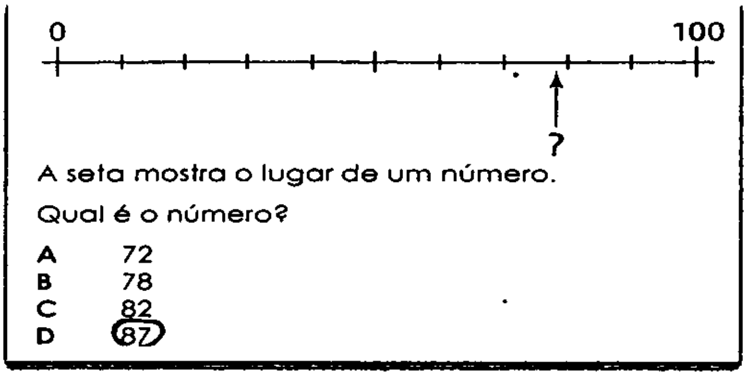


Figura 18 – Resposta de Ana na questão 15

Note-se que Ana, efectuou contagens de 10 em 10 para trás, tendo como suporte a linha numérica. Ao chegar ao 80, parece ter pensado que 87 estaria a uma distância de 3 de 80 em vez de uma distância de 3 de 90.

Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números

Onze alunos usaram a decomposição dos números nas suas respostas.

Érica, em resposta à questão 11 [a mesma questão que Teresa respondeu], regista a sua resposta da mesma forma que Teresa, como se pode ver na figura 19.

No entanto, mostra que usa outra estratégia ao explicitar a sua forma de pensar, pois diz de imediato: "tira 3 caixas e 4 canetas. Porque 1 dezena -10; 2 dezenas -20; 3 dezenas -30, mais 4 canetas".

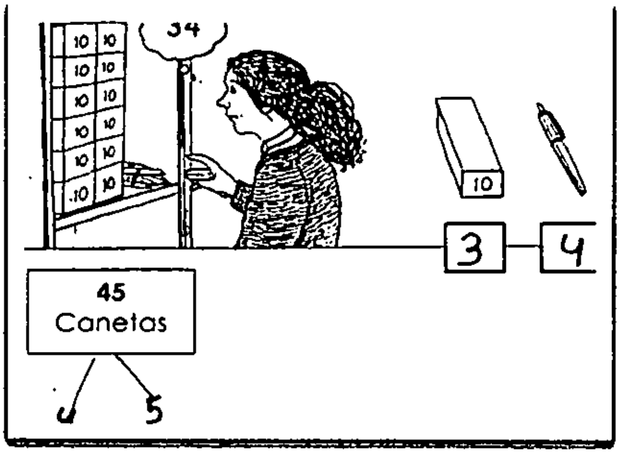


Figura 19 - Resposta de Érica na questão 11

Em relação ao 45, usa a mesma estratégia e explica: "4 caixas e 5 canetas. Porque 4 caixas são 4 dezenas e mais 5 canetas".

Enquanto Teresa para organizar a quantidade 34 e 45 conta de 10 em 10 e junta unidades, Érica conta quantas dezenas e unidades tem o 34 e o 45, pois, usa a dezena como uma unidade estruturante e decompõe os números em dezenas e unidades.

Finalmente, outra aluna, Rute na questão 13, responde:

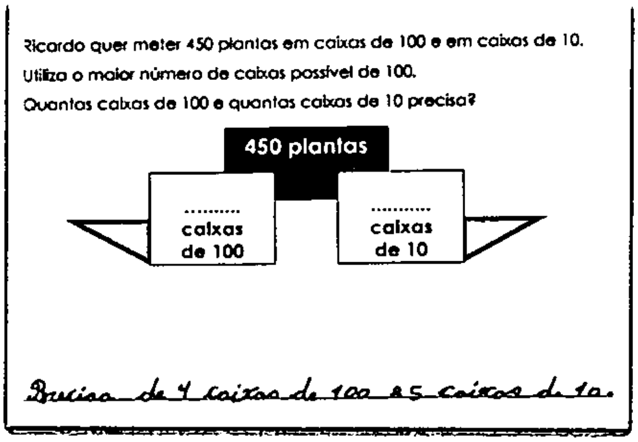


Figura 20 - A questão 13 e resposta de Rute à mesma questão

Explica como pensou, da seguinte forma: "4 caixas de 100 porque o maior algarismo no 400 é o 4 e 5 caixas de 10 porque o maior algarismo no 50 é 5".

Rute mostra que usa a decomposição decimal do 450 em 4 centenas e 5 dezenas, usa uma estruturação dos números idêntica a Érica. No entanto, a ordem de grandeza dos números é diferente, o que implica ter de usar uma outra entidade "a centena".

Vários alunos cometem erros associados à decomposição de "números grandes". Apresento, como exemplo desta situação, a resposta de Ricardo na questão 13:

Explica:
"o número das centenas é o 4 e o 50 é o número das dezenas e não pode pôr 450 só numa caixa"

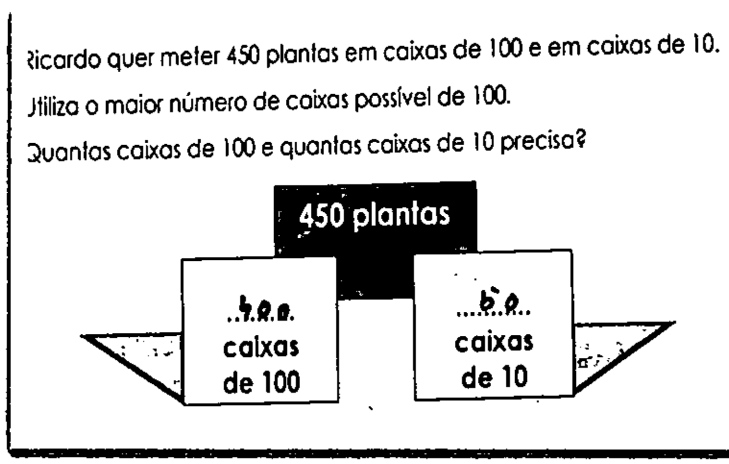


Figura 21 - Resposta de Ricardo na questão 13

Ricardo parece identificar o algarismo da ordem das centenas no número 450, mas não dá continuidade a essa estrutura para as ordens inferiores.

O que escreve também não reflecte uma decomposição correcta do número em centenas e dezenas.

Factos conhecidos

Quatro alunos usaram o mesmo facto conhecido associado à multiplicação para estabelecer relações entre os números. É o caso de Ruben, na questão 17, responde: "preciso 240" e explica, "acrescenta-se um zero".

Ruben usou como facto já automatizado que quando se multiplica um número por 10 se acrescenta um zero.

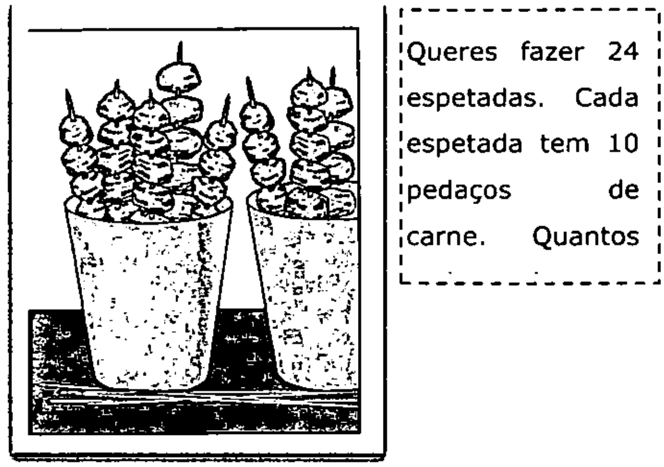


Figura 22 - A questão 17

Algoritmo

Na resolução de problemas associados ao conhecimento dos números, não se esperava, tendo em conta a constituição das questões, que os alunos usassem o algoritmo. No entanto, em sessenta e quatro respostas a onze questões, cinco alunos usam esta estratégia. Alguns alunos que usam parecem não perceber o que fazem.

Por exemplo, Ana Rita, na questão 13 usa o algoritmo sem lhe dar sentido. Pois, a resolução é idêntica quer divida por 10 ou por 100.

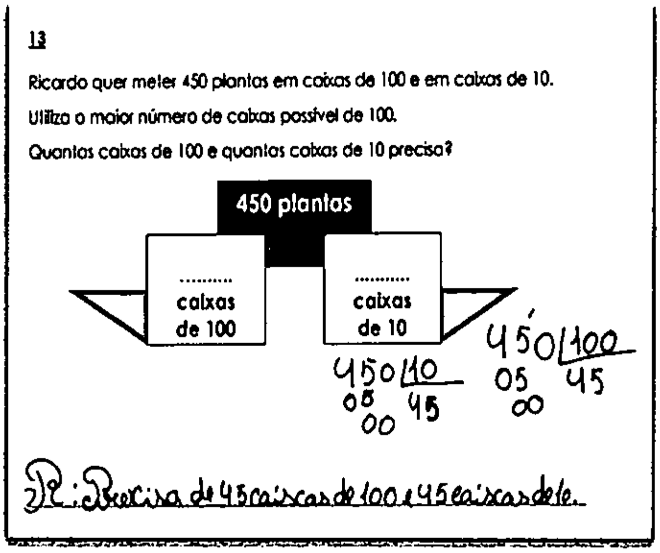
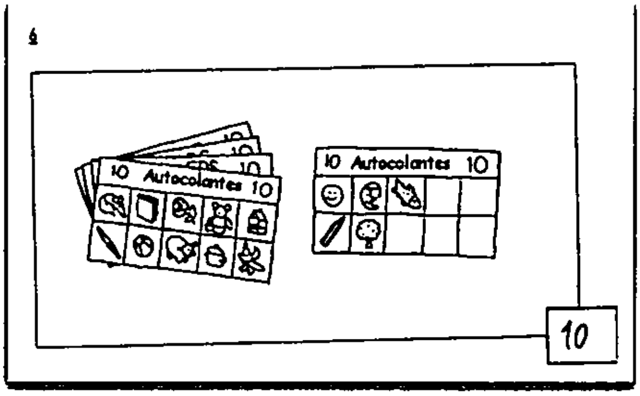


Figura 23 - Resposta de Ana Rita na questão 13

Outras respostas

Nove alunos usam estratégias menos comuns que não se enquadram nas categorias consideradas. A maioria das respostas corresponde a erros que os alunos cometem relacionados com a não compreensão do problema. Indico exemplos, nas respostas de João e Pedro.

João, na questão 6, responde de forma escrita "10" e não sabe explicar porquê.



Carolina tem 4 folhas cheias de autocolantes e 1 que não está cheia. Quantos autocolantes tem ao todo?

Figura 24 - A questão 6 e resposta de João à mesma questão

João parece que, por não compreender o problema, responde o número que é visível na imagem.

O Pedro cometeu outro tipo de erro na questão 17:

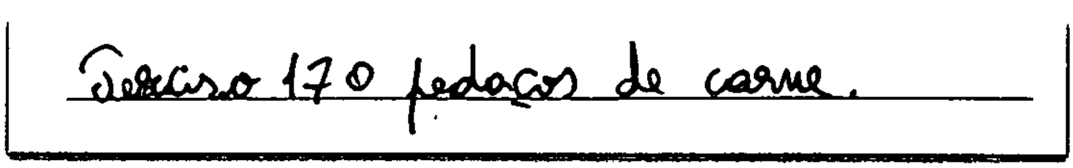


Figura 25 – Resposta de Pedro na questão 17

Este aluno explicou que: "aqui tenho 8 espetadas [contou as espetadas da imagem] e contei até 24 pelos dedos, e cada dedo representava 10 pedaços, então do 8 até 24 são 17 logo precisa de 170 pedaços de carne".

Podemos observar que, para o Pedro, os elementos da imagem fazem parte dos dados e para contar as espetadas que faltavam socorreu-se dos dedos, pois só consegue contar visualizando.

Síntese

Na tabela seguinte resume-se o tipo de estratégias, usadas pelos alunos, associadas às questões relativas ao conhecimento dos números.

Tabela global de respostas:

Questões / Estratégias	2	3	5	6	7	10	11	13	15	17	23
Conhecimento sequencial dos números		1	1						1		
Conhecimento sequencial usando saltos de 10			1		1	4	5	2	7		
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números	1			2		3	2	3	1	1	2
Factos conhecidos										4	
Algoritmos								2		1	2
Outras	1		2	2	2	1	1	2	1	2	
Acertou	1	1	2	1	1	7	7	3	6	5	4
Errou	1		2	3	2	1	1	6	4	3	
Não respondeu		1			1			1			
Total respostas	2	2	4	4	4	8	8	10	10	8	4

Tabela 20 - Resumo global das respostas

Na resolução das questões sobre o conhecimento dos números, os alunos usam as seguintes estratégias: *conhecimento sequencial dos números, conhecimento sequencial usando saltos de 10, conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números, usar factos conhecidos* e *algoritmo*. Incluídas na categoria "outras respostas" consideram-se as estratégias menos usuais.

A estratégia relativa ao *conhecimento sequencial dos números* é usada por alunos dos primeiros anos de escolaridade (à excepção de um aluno do 3.º ano), o que era expectável acontecer, dado ser uma estratégia que envolve um nível de estruturação baixo.

O conhecimento sequencial usando saltos de 10 e o *conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números*, são estratégias mais usadas pelos alunos, a partir do 2.º ano. É evidente nas respostas dos alunos o predomínio do uso de estruturas de decomposição decimal em oposição a outras decomposições passíveis de ser usadas e eventualmente mais eficazes.

O *algoritmo,* como estratégia de resolução de questões sobre o conhecimento dos números, é usado exclusivamente por alunos do 4.º ano. Isto poderá explicar a baixa frequência de erros nesta estratégia.

A análise de *outras respostas,* revela que os alunos têm alguma dificuldade em analisar o contexto dos problemas, o que os leva a responder de forma errada e, por vezes, de forma "não pensada". Pelo que, não se identifica um padrão ao nível dos erros cometidos. As questões, com maior frequência de erros são a 5, 6 e 7 e correspondem a respostas de alunos de 2.º ano de escolaridade e níveis de desempenho baixos.

5.4. As estratégias dos alunos e o nível de desempenho em questões relativas ao conhecimento dos números

A partir das produções escritas dos alunos nas questões associadas ao conhecimento dos números, analiso em que estratégias incidem as suas respostas, bem como a evolução do seu nível de "sofisticação" à medida que evolui o nível de desempenho dos alunos (do nível baixo ao nível alto) em cada ano de escolaridade.

As respostas dos alunos de 2.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões associadas ao conhecimento dos números, por níveis de desempenho.

2.º ano – nível baixo

Questões / Estratégias	2	3	5	6	7
Conhecimento sequencial dos números		1	1		
Conhecimento sequencial usando saltos de 10					
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números	1			1	
Outras	1		1	1	1
Acertou	1	1			
Errou	1		2	2	1
Não responde		1			1

Tabela 21 - Resumo das respostas do 2.º ano-B

2.º ano – nível médio

Questões / Estratégias	5	6	7	10	11
Conhecimento sequencial dos números					
Conhecimento sequencial usando saltos de 10	1		1	2	2
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números		1			
Outras	1	1	1		
Acertou	2	1	1	2	2
Errou		1	1		
Não responde					

Tabela 22 - Resumo das respostas do 2.º ano-M

2.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	10	11	13	15
Conhecimento sequencial dos números				
Conhecimento sequencial usando saltos de 10	1	1		2
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números		1	1	
Outras	1			
Acertou	2	2	1	1
Errou				1
Não responde			1	

Tabela 23 - Resumo das respostas do 2.º ano-A

Acertou	Errou	Não respondeu
2B - 2	2B - 6	2B - 2
2M - 8	2M -2	2M -0
2A - 6	2A - 1	2A - 1

Tabela 24 - Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 2.º ano

No 2.º ano e nível de desempenho baixo, os alunos para relacionar números, usam a contagem de 1 em 1, ou estruturas de decomposição decimal, ou outras estratégias não usuais que se revelam pouco eficientes, uma vez que todas essas respostas apresentam erros. Poderá significar que são estratégias de nível de "sofisticação" relativamente elevado e por isso, usam-nas incorrectamente.

No nível de desempenho médio, o *uso de saltos de 10 em 10* é a estratégia mais usada e o número de erros cometidos, é inferior ao nível anterior.

No nível de desempenho alto, o *conhecimento de estruturas de decomposição decimal* juntam-se ao uso de *saltos de 10 em 10* como estratégias mais usadas. A frequência de erros continua a reduzir.

Parece a haver uma relação estreita entre o nível de desempenho do aluno e a redução do erro.

As respostas dos alunos de 3.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões associadas ao conhecimento dos números, por níveis de desempenho.

3.º ano – nível baixo

Questões / Estratégias	10	11	13	15
Conhecimento sequencial dos números				1
Conhecimento sequencial usando saltos de 10		1		1
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números	2	1		
Outras			2	
Acertou	2	2		1
Errou			2	1
Não responde				

Tabela 25 - Resumo das respostas do 3.º ano-B

3.º ano – nível médio

Questões / Estratégias	10	11	13	15
Conhecimento sequencial dos números				
Conhecimento sequencial usando saltos de 10	1	1	1	1
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números	1		1	
Outras		1		1
Acertou	2	1		1
Errou		1	2	1
Não responde				

Tabela 26 - Resumo das respostas do 3.º ano-M

3.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	13	15	17
Conhecimento sequencial dos números			
Conhecimento sequencial usando saltos de 10	1	2	
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números	1		1
Factos conhecidos			1
Outras			
Acertou	2	2	2
Errou			
Não responde			

Tabela 27 - Resumo das respostas do 3ºano A

Acertou	Errou	Não respondeu
3B – 5	3B – 3	3B – 0
3M – 4	3M –4	3M –0
3A - 6	3A - 0	3A - 0

Tabela 28 - Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 3.º ano

No 3.º ano, salienta-se a convergência no uso de estratégias relacionadas com o *conhecimento sequencial usando saltos de 10* e *conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números*, nos três níveis de desempenho.

É só no nível de desempenho alto que os alunos deixam de errar as suas respostas.

As respostas dos alunos de 4.º ano

Nas tabelas seguintes resumo as respostas dos alunos, nas questões associadas ao conhecimento dos números, por níveis de desempenho.

4.º ano - nível baixo

Questões / Estratégias	13	15	17
Conhecimento sequencial dos números			
Conhecimento sequencial usando saltos de 10		1	
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números		1	
Factos conhecidos			
Algoritmo	2		
Outras			2
Acertou		1	
Errou	2	1	2
Não responde			

Tabela 29 - Resumo das respostas do 4.º ano-B

4.º ano - nível médio

Questões / Estratégias	17	23
Conhecimento sequencial dos números		
Conhecimento sequencial usando saltos de 10		
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números		2
Factos conhecidos	1	
Algoritmo	1	
Outras		
Acertou	1	2
Errou	1	
Não responde		

Tabela 30 - Resumo das respostas do 4.º ano-M

4.º ano – nível alto

Questões / Estratégias	17	23
Conhecimento sequencial dos números		
Conhecimento sequencial usando saltos de 10		
Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números		
Factos conhecidos	2	
Algoritmo		2
Outras		
Acertou	2	2
Errou		
Não responde		

Tabela 31 - Resumo das respostas do 4.º ano-A

Acertou	Errou	Não respondeu
4B - 1	4B - 5	4B - 0
4M - 3	4M - 1	4M - 0
4A - 4	4A - 0	4A - 0

Tabela 32 - Frequência de respostas certas, erradas e não respondidas no 4.º ano

No 4.º ano, salienta-se desde o nível de desempenho baixo, o uso do *algoritmo* como estratégia associada ao conhecimento dos números. No nível alto, as estratégias usadas são o *algoritmo* e os *factos conhecidos*, sem erros cometidos e todas as outras estratégias são abandonadas.

Evolução do conhecimento sobre os números

A tabela seguinte resume o tipo de estratégias usadas pelos alunos no 2º, 3º e 4.º anos por níveis de desempenho, em questões associadas ao conhecimento dos números.

Tabela global de estratégias usadas pelos alunos

Estratégias / Anos	Níveis	*Conhecimento sequencial dos números*	*Conhecimento sequencial usando saltos de 10*	*Conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números*	*Factos conhecidos*	*Algoritmo*	*Outras*
2.º ano	B	2		2			4
	M		6	1			3
	A	4	2				1
3.º ano	B	1	2	3			2
	M		4	2			2
	A		3	2	1		
4.º ano	B		1	1		2	2
	M			2	1	1	
	A				2	2	

Tabela 33 - Resumo das estratégias usadas pelos alunos por níveis de desempenho

Na globalidade, a análise das respostas às questões associadas ao conhecimento dos números mostra que, o uso de estratégias progressivamente mais sofisticadas, parece estar relacionado com a progressão, dos alunos, nos anos lectivos. No esquema da figura 26 tenta mostrar-se essa evolução.

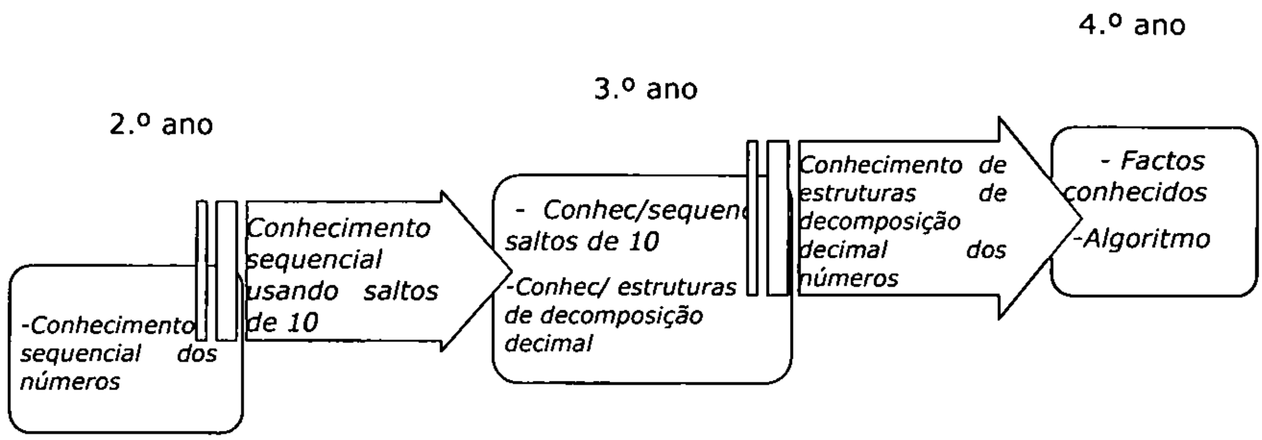


Figura 26 - Esquema que ilustra a evolução das estratégias sobre o conhecimento dos números

A estratégia que assenta no conhecimento sequencial dos números de 1 em 1, é usada apenas no 2.º ano. Assinala-se que esta estratégia, corresponde a um conhecimento inicial sobre a sequência numérica.

No 2.º e no 3-º anos o *conhecimento sequencial usando saltos de 10* é usado tanto pelos alunos de nível médio como pelos alunos de nível alto.

Note-se que as estratégias que assentam nas *estruturas de decomposição decimal dos números* embora ainda usadas no 2.º ano, são mais usadas no 3.º ano, que por sua vez dão lugar aos *factos conhecidos* e *algoritmo* no 4.º ano.

O *algoritmo* é usado exclusivamente por alunos do 4.º ano, desde o nível baixo ao nível alto. A análise também mostra que, parece haver uma relação estreita entre o nível de desempenho do aluno e a redução do erro. Assim, desde o 2.º ao 4.º ano, são os alunos de nível de desempenho alto que dão mais respostas correctas.

6. Conclusão

Este capítulo apresenta as conclusões do estudo e uma reflexão pessoal que permite identificar algumas orientações curriculares que saem reforçadas das conclusões, bem como uma reflexão sobre o significado da realização deste trabalho para a investigadora.

6.1 Conclusões do estudo

Este estudo tem como principal objectivo analisar as ideias e procedimentos numéricos que os alunos do 1.º ciclo usam na resolução de problemas e o modo como eles evoluem. Em particular, pretende-se compreender quais os conhecimentos que os alunos têm sobre os números e quais as estratégias que usam na resolução de problemas que envolvem a operação subtracção.

Dado que o interesse do estudo se relaciona com a compreensão dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas numéricas, a parte empírica constou da resolução de tarefas diagnóstico (anexo 4) acompanhadas de entrevistas do tipo clínico, a 6 alunos do 2.º ano, 6 do 3.º ano e 6 do 4.º ano, distribuídos por 3 níveis de desempenho. A análise de dados centrou-se em produções escritas dos alunos e em entrevistas áudio-gravadas. As tarefas tiveram por base o tema "Números e operações", que é um dos temas do programa de Matemática do ensino básico. Mais concretamente, incidem sobre o conhecimento dos números associado ao desenvolvimento do sentido de número e o tópico operações com números naturais - subtracção.

Um dos propósitos centrais do estudo é analisar a progressão dos conhecimentos numéricos dos alunos numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. Nomeadamente, pretende-se compreender quais as estratégias que usam e os erros que cometem na resolução de problemas que envolvem a operação subtracção e conhecimento dos números e como evoluem nos conhecimentos por níveis de desempenho. Nos pontos seguintes indicam-se e discutem-se as principais conclusões relativas a estes aspectos. Partindo dos objectivos centrais do estudo as conclusões organizam-se em dois pontos: (1) estratégias usadas, tipo de erros cometidos pelos alunos e transformação das ideias e procedimentos dos alunos quando evoluem ao nível do raciocínio e do cálculo, na resolução de problemas que envolvem subtracção; (2) conhecimento dos números, sua evolução e transformações das ideias e procedimentos dos alunos quando evoluem ao nível do raciocínio e do cálculo.

6.1.1 Estratégias usadas, tipo de erros cometidos pelos alunos e transformação das ideias e procedimentos dos alunos quando evoluem ao nível do raciocínio e do cálculo, na resolução de problemas que envolvem subtracção

1. Na globalidade, o estudo mostra que os alunos usam como estratégias de cálculo na resolução de problemas de subtracção, *contar, saltar, decompor, usar factos conhecidos* e o *algoritmo*. Assim, os dados analisados sugerem que os alunos usam contagens decrescentes (*contar para trás*) e contagens para a frente (*contar até*), recorrendo sobretudo ao uso destas últimas. De facto, mesmo em situações que envolvem a operação subtracção, usam com mais frequência estratégias de contagem para a frente. Esta conclusão confirma o que Fuson et al. (1997a) sugerem quando afirmam que contar para a frente parece ser uma estratégia facilitadora da contagem.

Ao usar estratégias de contagem, os alunos cometem diferentes tipos de erros. Alguns repetem os números e portanto contam-nos mais do que uma vez. Outros, cometem erros associados à não compreensão do problema. Outros, ainda, cometem o erro típico da contagem regressiva (decrescente) identificado na literatura, que consiste em contar o aditivo e que Fuson (2003) realça como uma dificuldade em contar para trás.

Embora com menor frequência os alunos usam, também, as estratégias *saltar*, *decompor* e *uso de factos conhecidos*. Usam a estratégia *saltar* dando saltos para a frente, para adicionar. Ou seja, partem do subtractivo, sem o decompor, e chegam ao aditivo. Um aspecto a salientar é que, contrariamente ao que acontecia com as estratégias de contagem, não se identificam erros no uso da estratégia *saltar*.

Os alunos usam a *decomposição decimal*, tal como é caracterizada na literatura, em Fuson et al. (1997a) e Thompson (1999), pois, decompõem os dois números em dezenas e unidades, adicionam as dezenas e unidades em separado e depois juntam tudo. Parece não haver dificuldade no uso da estratégia, pois, o erro que ocorre não é sintomático disso.

O *uso de factos conhecidos* é ilustrado por um automatismo adquirido pelos alunos - 25+25 é 50. Trata-se de um automatismo aditivo estabelecendo uma relação com a operação subtracção, o que vai de encontro ao entendimento de Fosnot e Dolk (2001) sobre uso de *factos numéricos básicos*.

O *cálculo relacional* é predominantemente usado por alunos do 3.º ano de escolaridade que manipulam de forma inteligente os números e denotam o desenvolvimento de cálculo flexível. Apenas se verifica um erro no uso desta estratégia, relacionado com a decomposição associada à operação subtracção: os números são decompostos de forma adequada, mas não se usa bem com a operação subtracção.

Na resolução dos problemas de subtracção os alunos usam, frequentemente, o *algoritmo*. Esta é a estratégia mais frequentemente usada por alunos do 4.º ano de escolaridade. Contudo, nem sempre a usam de forma correcta: 12 das 41 respostas contabilizadas estão incorrectas (cerca de 29%). O tipo de erros cometidos são erros de cálculo e erros de conceito. Os resultados deste estudo confirmam, assim, as ideias defendidas por Carpenter (1998) de que o uso dos *algoritmos* da subtracção levanta problemas a alguns alunos que tendem a usá-los de modo incorrecto.

2. Ao nível da evolução por nível de desempenho destaca-se, globalmente, que são os alunos com nível de desempenho mais elevado que tendem a usar estratégias mais "sofisticadas" e/ou mais formais. Assim, no 2.º ano predomina o uso de estratégias de contagem, porém existem também situações de uso de decomposição, dar saltos e cálculo relacional. Nos níveis de desempenho mais baixos, os alunos usam com frequência a *contagem para a frente* como estratégia para subtrair, no nível alto usam estratégias mais formais. Nos níveis de desempenho médio e alto, para além do *algoritmo* os alunos usam, também, outras formas de resolução que se constata serem estratégias formais e com algum nível de "sofisticação", embora usadas com incorrecções. Conclui-se, assim, que as tentativas de resoluções que se enquadram num nível mais estruturado, parecem ser ainda não muito sólidas. O *algoritmo* é usado de forma incorrecta, o que parece confirmar a indicação de autores como Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) de que o ensino precoce dos *algoritmos* não permite alicerçar conhecimentos importantes sobre os números e operações e parece estar relacionado com o uso incorrecto desta estratégia. No 2.º ano, o nível de sofisticação das estratégias usadas pelos alunos evolui com o nível de desempenho dos alunos. O mesmo acontece com o número de respostas incorrectas. Assim, o uso de procedimentos mais formais parece estar relacionado com a maior frequência de erros.

No 3.º ano, os dados sugerem que a *contagem* como estratégia para subtrair tem ainda algum peso nos níveis mais baixos de desempenho. O *algoritmo* é a estratégia mais usada, predominantemente nos níveis médio e alto, com relativo sucesso. De salientar, no nível de desempenho alto o uso correcto de *cálculo relacional* como estratégia de resolução (das cinco respostas com uso de *cálculo relacional*, quatro estão certas). Estes dados sugerem que poderá existir uma relação estreita entre o uso de *cálculo relacional* e a diminuição de erros, aspecto que é referido, embora implicitamente, por autores como Fosnot e Dolk (2001).

No 4.º ano, as estratégias usadas pelos alunos centram-se em torno do uso do *algoritmo*, embora só usado sem erros pelos alunos de nível de desempenho alto. Estes dados apontam para que o uso correcto do *algoritmo*, contrariamente ao que se considera habitual, se reveste de dificuldades sobretudo para os alunos com nível de desempenho baixo.

Em suma, a análise do uso de estratégias de subtracção, aponta a existência de dois pólos extremos, o *contar* (estratégia com um nível de sofisticação baixo) e o uso de *algoritmo* (estratégia mais sofisticada e formal). As estratégias de nível intermédio de "sofisticação" como o *saltar, decompor* e *uso de factos conhecidos* são pouco usadas e deixam de ter representatividade nas respostas dos alunos a partir do 3.º ano nível médio. Por outro lado, o uso de procedimentos mais formais parece estar relacionado com a maior frequência de erros.
Isto pode ser interpretado como decorrente de um ensino centrado em estratégias pouco sofisticadas nos primeiros anos de escolaridade, com uma passagem "quase" directa para uso de estratégias de elevado nível de "sofisticação" e em que o ensino de estratégias de cálculo mental de nível intermédio, como o *saltar, decompor* e *relacionar* não é muito significativo, contrariamente ao que autores como Beishuizen (2003) preconizam. De facto, vários autores salientam que é importante contribuir para desenvolver um conjunto de competências numéricas associadas à subtracção, que permitem aos alunos resolver todo o tipo de situações subtractivas, antes de terem conhecimento do algoritmo. Também, todo um trabalho baseado nos números e nas suas relações ajuda mais os alunos na sua compreensão do que a introdução prematura dos algoritmos (Beishuizen, 2003).

6.1.2 Conhecimento dos números, sua evolução e transformações das ideias e procedimentos dos alunos quando evoluem ao nível do raciocínio e do cálculo.

1. Os dados empíricos evidenciam que os alunos mostram o conhecimento que têm dos números, recorrendo à contagem sequencial - *conhecimento sequencial dos números*; reconhecem os números numa estrutura

organizada de 10 em 10 - *conhecimento sequencial usando saltos de 10*; usam o *conhecimento de estruturas de decomposição decimal* dos números; usam *factos conhecidos* para estabelecer relações entre os números e usam o *algoritmo*. Assim, os dados analisados apontam que os alunos usam o *conhecimento sequencial dos números*, essencialmente, nos primeiros anos de escolaridade, o que era expectável acontecer, dado ser uma estratégia que envolve um nível de estruturação baixo. Contudo, cometem erros de contagem, concretamente quando contam para trás. Estes dados confirmam resultados de várias investigações referidas por Treffers e Buys (2001) quando os alunos se encontram ainda no nível de *cálculo por contagem* e os leva a incorrer num erro, apontado por Fuson (2003) como uma das dificuldades de contar para trás.

Ao avançarem no nível de escolaridade, os alunos usam estratégias que revelam *conhecimento sequencial usando saltos de 10 e conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números*. É evidente nas respostas dos alunos o predomínio do *uso de estruturas de decomposição decimal* em oposição a outras decomposições passíveis de ser usadas e eventualmente mais eficazes. Contudo, nem sempre as usam de forma correcta e os erros que os alunos cometem parecem estar relacionados com a ordem de grandeza do número. Pois, vários alunos cometem erros associados à decomposição de "números grandes".

Os alunos usam *factos conhecidos* da multiplicação para estabelecer relações entre os números, nomeadamente, na multiplicação por 10 acrescentam um zero. Este uso da operação multiplicação para estabelecer relações entre os números é alicerçado pela caracterização de sentido de número feita por McIntosh et al. (1992), concretamente na área do *Conhecimento e destreza com as operações*, no que se refere à *Compreensão do efeito das operações*.

Os alunos do 4.ºano usam, contrariamente ao esperado, o *algoritmo* como estratégia de resolução de questões sobre o conhecimento dos números. Os erros que os alunos cometem parece relacionarem-se com a dificuldade em dar sentido ao algoritmo, facto que leva vários autores a considerar este aspecto decorrente de uma tendência de ensino cuja introdução do algoritmo, como estratégia de resolução de problemas, é feita demasiado cedo. Esta conclusão confirma o que Brocardo et al. (2003) perspectivam acerca da introdução precoce dos algoritmos, não proporcionando aos alunos a oportunidade de desenvolver a compreensão de um conjunto de relações entre os números e as operações associada ao desenvolvimento do sentido de número. Também autores britânicos e holandeses, consideram que a aritmética mental deve começar pelo desenvolvimento de estratégias informais da criança em vez de impor procedimentos formais (Treffers & De Moor, 1990).

Numa perspectiva de aprendizagem, a resolução de problemas da vida real exige, por vezes, raciocínios e competências de cálculo para os quais é necessário que os alunos tenham desenvolvido o sentido de número (McIntosh et al., 1992). Neste contexto os resultados do estudo, reforçam as ideais preconizadas por McIntosh et al. (1992) e pelo NCTM (2000) de que é fundamental que os alunos, perante situações concretas de cálculo, sejam capazes de mobilizar o conhecimento que têm sobre os números e as operações e o apliquem de uma forma flexível e eficaz, relacionando o contexto com as estratégias usadas.

2. Ao nível da evolução do conhecimento dos números, por nível de desempenho, destaca-se globalmente, que o uso de estratégias mais "sofisticadas" evolui com a progressão dos alunos nos anos lectivos. Assim, no 2.º ano, os alunos mostram o conhecimento que têm dos números, através do uso de *contagens sequências* de 1 em 1 ou de 10 em 10 e do uso de *estruturas de decomposição decimal* dos números. No nível de desempenho baixo, os alunos, usam a contagem 1 a 1, ou estruturas de decomposição decimal, para relacionar números. Usam também, outras estratégias não usuais que se revelam pouco eficientes, uma vez que todas essas respostas apresentam erros. No nível de desempenho médio, as *contagens em saltos de 10 em 10* é a estratégia mais usada. No nível de desempenho alto, o *conhecimento de estruturas de decomposição decimal* e o uso de *saltos de 10 em 10* são as estratégias preferidas pelos alunos. A frequência de erros reduz progressivamente desde o nível baixo ao nível alto de desempenho dos alunos. Esta tendência parece delinear uma relação estreita entre o nível de desempenho do aluno e a redução do erro.

No 3.º ano, as estratégias usadas pelos alunos ao longo dos três níveis (Baixo, Médio e Alto) centram-se no uso de *conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números* e *conhecimento sequencial usando saltos de 10*. Embora, só usadas sem erros no nível de desempenho alto, uma tendência que se vem confirmando ao longo do estudo.

No 4.º ano, salienta-se desde o nível de desempenho baixo, o uso do *algoritmo* como estratégia associada ao conhecimento dos números. No nível de desempenho alto, o uso de *factos conhecidos* e *algoritmo* são estratégias dominantes e sem erros e todas as outras estratégias são abandonadas. Ou seja, as estratégias de nível de "sofisticação" mais baixo deram lugar a outras mais "sofisticadas".

Na globalidade, a análise das respostas às questões associadas ao conhecimento dos números mostra que, o uso de estratégias progressivamente mais "sofisticadas", parece estar relacionado com a progressão, dos alunos nos anos lectivos. Pois, a partir do 2.º ano a estratégia que envolve *conhecimento sequencial dos números* – estratégia de nível de estruturação mais baixo - é abandonada, a seguir as estratégias que mais usam são as que envolvem *conhecimento sequencial usando saltos de 10* e *conhecimento de estruturas de decomposição decimal dos números*, no 3.º ano, que por sua vez dão lugar aos *factos conhecidos* e *algoritmo* no 4.º ano – estratégia mais "sofisticada" e formal. Percurso que vai de encontro com o entendimento de Beishuizen (2003), quando diz que todo um trabalho baseado nos números e nas suas relações ajuda mais os alunos na sua compreensão do que a introdução prematura dos algoritmos. A análise mostra, também, que são os alunos de nível de desempenho alto que deixam de errar as respostas. Esta observação sugere que, parece haver uma relação estreita entre o nível de desempenho do aluno e a redução do erro.

6.2 Reflexão

Este estudo foi realizado num momento particular do ensino da Matemática em Portugal. No ano lectivo de 2010/11, vive-se o momento da generalização do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), ao qual se associa a uma conjuntura de mudança das abordagens no ensino Matemática. Este novo programa, quando comparado com os programas anteriores, apresenta uma nova perspectiva para o ensino dos números e operações, associada explicitamente, ao desenvolvimento do sentido de número. Ideia corroborada por documentos internacionais de referência como os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, que referem: "O ensino efectivo da matemática requer compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, (...) e apoio para que o aprendam correctamente" (NCTM, 2007, p. 17). Este documento destaca ainda que, "a compreensão dos números e das operações e o desenvolvimento do sentido de número constituem o cerne da educação matemática para os primeiros anos do ensino básico" (NCTM, 2007, p. 34). Este foi um contexto significativo para o estudo e uma motivação para mim.

Uma reflexão sobre os seus resultados e conclusões, no que diz respeito à resolução de problemas que envolvem a operação subtracção, salienta um ensino centrado em estratégias pouco sofisticadas nos primeiros anos de escolaridade, com uma passagem "quase" directa para uso de estratégias de elevado nível de "sofisticação", onde as estratégias de nível intermédio não são muito significativas. Isto pode significar que é importante promover um ensino que contemple o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental associadas a um nível de "sofisticação" intermédio.

Em relação ao desenvolvimento do sentido de número, das conclusões do estudo saem reforçadas as indicações curriculares, no que se refere ao retardar a introdução dos *algoritmos formais* como estratégia de resolução de problemas.

A nível pessoal, este estudo foi realizado num contexto muito especial da minha vida profissional. Há cinco anos atrás, sendo eu professora de 3.º ciclo e ensino secundário, estava muito distante das questões do ensino/aprendizagem no 1.º ciclo. No entanto, o modo como o professor deve planificar a sua prática de sala de aula, tendo em conta as aprendizagens diferenciadas de cada aluno, já fazia parte das minhas preocupações. Aquando da minha iniciação como formadora no PFCM, constatei que esta problemática se coloca desde os primeiros anos de escolaridade. Confirmei assim, a importância do professor ter uma ideia clara do que os alunos sabem, que conhecimentos matemáticos têm e que estratégias usam.

A realização deste estudo serviu o objectivo pessoal de desenvolver um processo formativo próprio que me permitisse dar resposta a algumas destas minhas preocupações. Por isso, o estudo afirmou-se de grande importância para o meu crescimento profissional e pessoal, pela reflexão que me proporcionou quer em relação ao trabalho de campo com os alunos, quer em relação ao desenvolvimento da investigação. Dele saí com convicções reforçadas acerca da importância para o professor de saber analisar as produções dos alunos, perceber como pensam, o que sabem, para a partir daí planificar a sua proposta de ensino, no sentido da progressão das aprendizagens dos alunos. Por outro lado, o próprio processo investigativo em que estive envolvida, permitiu-me um desenvolvimento e amadurecimento das ideias e dos processos característicos deste tipo de trabalho, os quais senti que tiveram reflexos no domínio profissional. No contexto da formação contínua, este trabalho constituiu uma mais-valia para o desempenho das minhas funções como formadora, quer com meus contributos no decorrer da aula em si, quer no *feedback* aos formandos e na reflexão sobre as aulas que acompanhava. Passei a sentir mais segurança ao direccionar a sua reflexão para uma análise sobre as aprendizagens dos alunos, ajudando-os a tornar conscientes e reflectidas as aprendizagens (dos formandos e dos alunos).

A nível pessoal deparei-me com algumas dificuldades, mais concretamente na conciliação das vertentes pessoal e profissional (ser competente como profissional, investigadora e mãe), que são porém compensadas pelo prazer de fazer este trabalho e pelo que aprendi.

Referências

Anghileri, J. (2001). Contrasting approaches that challenge tradition. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithemetic teaching* (pp. 4-13). Buckingham: Open University Press.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, pp. 157-193.

Bass, H. (2003). Computation fluency, algorithms, and mathematical proficiency: One mathematician's perspective. *Teaching Children Mathemathics*, *9*(6), 322-326.

Brown, M. (2003). Swing of the pendulum. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 3-16). Buckingham: Open University Press.

Bodgan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M. & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred, *Learning and Instuction*, *7*, 87-106.

Beishuizen, M. (1999). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 157-168). Buckingham: Open University Press.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), O sentido do número: Reflexões que entrecruzam a prática (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Eds.). (2008). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J-M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.

Busy (2001). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp.121-146). Utrecht: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A., (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B., (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 3-20.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 179-202.

Cebola. G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. da Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 223-240). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Educação.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Borcardo, L. Serrazina & I. Rocha (Edits.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35-53). Lisboa: Escolar Editora.

Duarte, T. (2004). A *Estatística no 1º Ciclo: Uma abordagem no 3.º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências de Lisboa.

Equipa do Projecto *Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares* (2005). *Desenvolvendo o Sentido do Número, Materiais para o Educador e para o Professor do 1.º ciclo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Equipa do Projecto *Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares* (2007). *Desenvolvendo o Sentido do Número, Materiais para o Professor do 1.º ciclo*, Volume II. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing Number Sense, Addition and Subtraction*. Portsmouth, NH: Heineman.

Fuson, K. C. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. In J. Kilpatrick, G. W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for schools mathematics* (pp. 68-94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P., Olivier, A., et al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130-162.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In Leonor Santos, P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Actas do Encontro Internacional de Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. *Jounal for research in Mathematics Education*, *22*(3), 170-218.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *14*, 251-284

Hope, J. A. (1986). Mental calculation: Anachronism or basic skill? In H. Schon & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation* (pp. 45-54). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hope, J. A. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 12-16.

Hunting, R. (1997). Clinical Interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Klein, A. S. (1998). Mathematics education: Cognitive and effective perspective. In *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base* (pp. 5-19). Utrecht: Freudenthal Institute

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Ròcha (Edits.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

Long, M., & Ben-Hur, M. (1991). Informing learning through the clinical interview. *Journal Articles Arithmetic Teacher, 38*(6), 44-46

Mcintosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44..

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 347-395.

Thompson, I. (1995). The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children. *European Early Childhood Education Research Journal, 3*, 5-16.

Thompson, I. (1999). Mental calculation Strategies for addition and subtraction. *Mathematics in Schools, 28*, 1-4.

Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 145-168). Buckingham: Open University Press.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), Issues in teaching numeracy in primary schools (pp. 169-183). Buckingham: Open University Press.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for pimary education. In L. Steefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-56). Utrecht: Freudenthal Institute.

Treffers, A., & Buys, K. (2001). Grade 1 (and 2) - Calculation up to 20. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 43-60). Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Treffers, A., & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61-88). Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 557-628). Charlotte, NC: Information Age.

Whitacre, I., & Nickerson, S. (2006). Pedagogy that makes (number) sense: A classroom teaching experiment around mental math.

Wittmann, E. (1998). Mathematics education as a design science. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods*: Newbury Park, NJ: Sage.

Anexos

Anexo 1

Carta aos encarregados de educação

Exmo. Sr.
Encarregado de Educação

No âmbito do Mestrado em Educação área de especialização Didáctica da Matemática, que frequento na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, irei realizar um trabalho de investigação subordinado ao tema "Avaliação diagnóstico de aprendizagens" no 1º ciclo.
Para concretizar o referido trabalho necessito de recolher alguns dados através de observação de aulas e registo áudio de entrevistas ao seu educando, pelo que solicito a vossa autorização e compreensão.
Os dados recolhidos serão utilizados exclusivamente para o estudo em causa sendo garantido o anonimato dos alunos e da escola.
Aos alunos ser-lhe-ão apresentadas algumas tarefas que se enquadram nos temas do programa em vigor e preparadas com a professora da turma.

Agradeço desde já a vossa colaboração, solicitando a V. Exª que assine a declaração abaixo, que a destaque e devolva à professora.
Com os melhores cumprimentos,

Pinhal Novo, 21 de Novembro de 2008

____

Fátima Gonçalves

✂ --

Autorizo que o meu educando ______________________________

participe na recolha de dados conduzida pela professora Fátima Gonçalves, no âmbito do seu estudo para a dissertação de Mestrado em Didáctica da Matemática.

____/____/____ Assinatura

____

Anexo 2

Pedido de autorização de recolha de dados ao agrupamento

Exma. Sra. Presidente do Conselho Executivo do

Agrupamento de Escolas [redacted]

Eu Fátima de Jesus Carvalho Gonçalves, professora do quadro de nomeação definitiva da Escola Secundária com 3º Ciclo de Pinhal Novo, nos últimos anos a desempenhar funções de formadora no programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos (PFCM) na Escola Superior de Educação de Setúbal e encontro-me a realizar a dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização Didáctica da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, com o objectivo de diagnosticar aprendizagens.

Para o trabalho de investigação que irei realizar subordinado ao tema "Avaliação diagnóstico de aprendizagens" no 1º ciclo, necessito de recolher alguns dados através de observação de aulas e registo áudio de entrevistas a alunos da aula da professora [redacted] a leccionar na EB1/JI Pinhal Novo1 , e registo áudio de entrevistas a alunos das professoras [redacted] e [redacted] a leccionar na mesma escola, pelo que solicito a sua autorização e compreensão. Esta recolha de dados decorre de um trabalho cooperativo com estas docentes.

Os dados recolhidos serão utilizados exclusivamente para o estudo em causa sendo garantido o anonimato dos alunos e da escola, devo referir que foi feito um pedido de autorização aos Encarregados de Educação dos alunos, para a referida recolha de dados, que junto em anexo.

Aos alunos ser-lhe-ão apresentadas algumas tarefas que se enquadram nos temas do programa em vigor.

Agradeço desde já a colaboração, solicitando o respectivo deferimento.

Com os melhores cumprimentos,

Pinhal Novo, 21 de Novembro de 2008

Fátima Gonçalves

Anexo 3

Histórias que serviram de contexto às entrevistas das Séries 1, 2 e 3

Histórias para Série1, Série2 e Série3

Série 1

1- (subtracção)

- **A mãe vai fazer um bolo. Ela tinha uma caixa com 10 ovos e já partiu 6. Quantos ovos não foram utilizados?**

Se o aluno representa 10 em 6, com os 5 dedos de uma mão ou decompõe 10 em 6+4:

- **A Ana tira 4 ovos de uma outra caixa com 10 ovos. Quantos ovos ficam ainda na caixa?**
  Mostra-me como chegaste a esse resultado.

- **10 – 7 ? Mostra-me com os teus dedos como calculas isso.**

2 - (Números)

Acompanhar com o dedo os números da imagem.

- **Na turma do 3º A há 15 alunos, 5 são rapazes. Quantas raparigas há?**

Se o aluno decompõe 15 em 10+5 ou contou de 5 em 5 (5, 10, 15):

- **Na turma da Sara há 18 alunos, 10 são rapazes. Quantas raparigas são?**

3 - (Números)

Mostrando as crianças da imagem e contando a história:

- **Quem fez mais bolos? Quantos?**
- **Quem fez menos bolos?**
- **Quantos a menos?**
- **Entre o Rui e a Carla quem fez menos bolos? Quantos menos?**

4- (subtracção)

- **A professora escondeu o número com uma "carinha". Tu sabes qual é esse número?**
  Explica-me como sabes.
  Mostra-me como podes encontrar esse número?

Série 2

5- (Números)

Mostrando a ponta da seta

- **Que número deverá ser colocado aqui? Escreve esse número na folha.**

Se o aluno associa os números com a contagem por grupos de 5:

- **Entre que números se encontra 17? Mostra o seu lugar com o teu dedo.**
- **Mostra o lugar de 8.**
- **Sabes onde deve estar o 13? Mostra-me o seu lugar.**

6- (Números)

Mostrar as folhas dos autocolantes e contar a história:

- **Carolina tem 4 folhas cheias de autocolantes e uma folha que não está cheia. Quantos autocolantes tem ao todo?**

Se o aluno reage com compreensão:

- **O Pedro tem 5 folhas cheias e uma folha com 1 autocolante. Quantos autocolantes tem o Pedro ao todo?**

7 - (subtracção)

Mostrar os animais contando a história:

- **O Sr. Joaquim tem 30 animais que comem no prado da sua quinta, 10 ovelhas e algumas cabras. Quantas cabras tem?**

Se o aluno simboliza as quantidades com os dedos (cada dedo uma dezena):

- **Num outro prado há 50 animais, 30 são cabras. Quantas são ovelhas?**
- **Na quinta do Sr. Zé há 40 animais; tantas cabras como ovelhas. Quantas são as cabras? E quantas ovelhas?**

8 - (subtracção)

Mostrar a imagem dos coelhos e das tocas (insistir no 13):

- **Quantos coelhos vês?**
- **Treze (13) coelhos vivem nesta cerca. Os que não vês dormem nas tocas. Quantos coelhos estão a dormir?**

Série 3

9 - (subtracção)
Mostrar as fotos:

- **Bernardo tem 18 anos. É mais novo que o Sérgio. Quantos anos mais novo?**

10 - (Números)

Mostrar a imagem com números:

- **Vês cinco números neste quadro. Quais os números que se situam entre 60 e 70 na linha numérica de 0 a 100?**

Se o aluno não consegue responder de cabeça ou se se enganou:

- **Sabes contar assim: 10, 20, 30, ...?**
  Sabes contar até mais? Eu gostava de saber como é?

Mostrar a seguir o segmento entre 50 e 70:

- **Mostra-me o lugar de 60. E de 70.**
- **Quais os números do quadro que se podem localizar entre 60 e 70?**

11- (Números)

- **A D. Fátima entrega todos os dias canetas, cadernos, giz e outras coisas que os professores necessitam na sua sala de aula. Hoje tem que levar 34 canetas para a sala da prof. Joana.**

Como pegavas rapidamente em 34 canetas do armário?
Pegavas em quantas caixas e quantas canetas?

Se o aluno formou correctamente a quantidade:

- **O prof. André precisa de 45 canetas. Quantas caixas e quantas canetas retirarás do armário?**

12 - (subtracção)

- **A Inês guarda 50 selos na caixa. Tem 25 selos na gaveta de Espanha. Quantos selos tem na gaveta de Portugal?**

Anexo 4

Conjuntos de séries

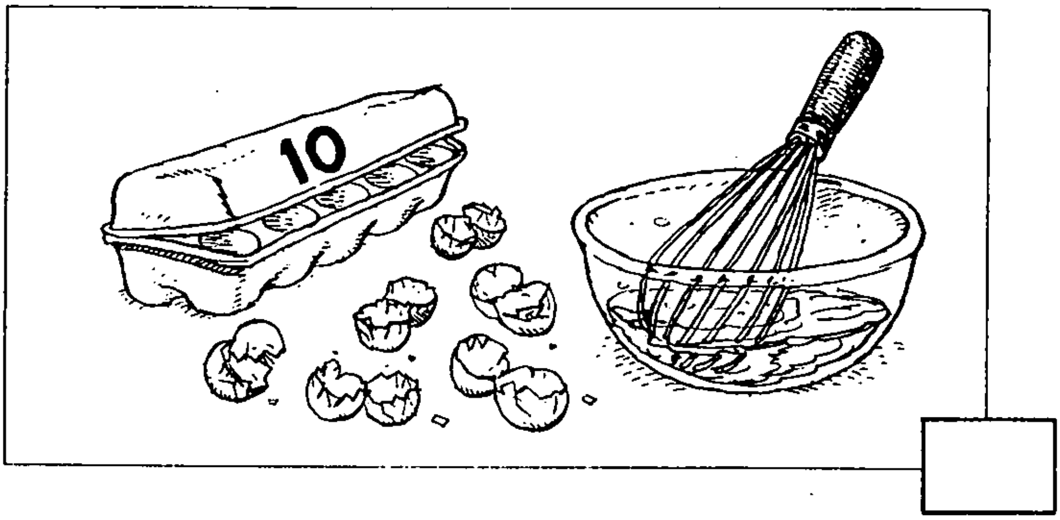
2 º Ano - B

Série1 + Série2[6]

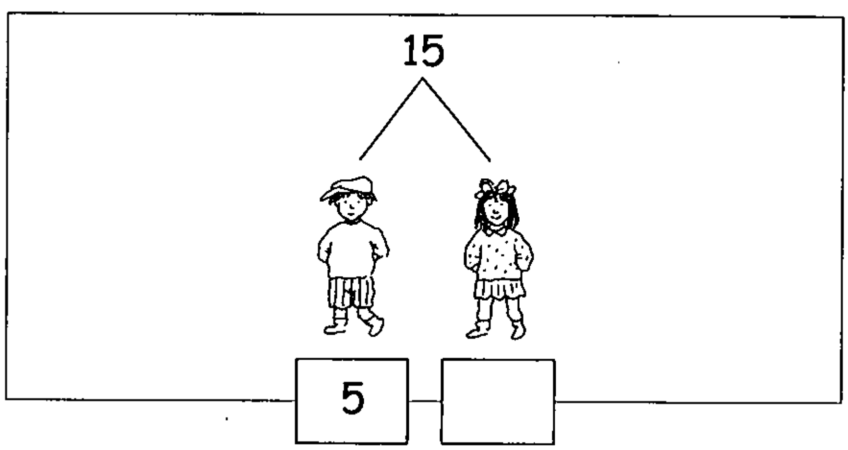
[6] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

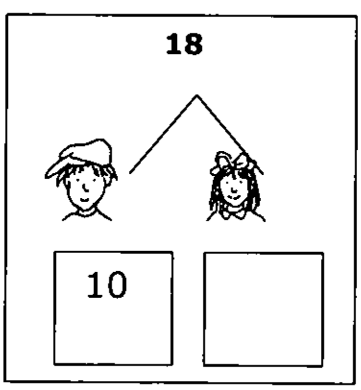
2B **Série1**

1



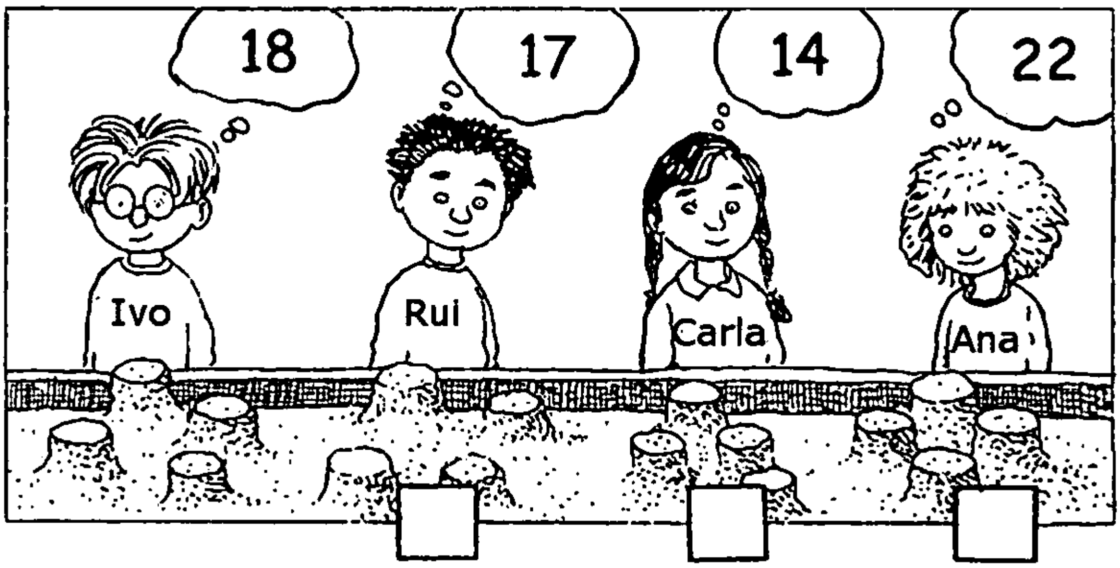
2





2B **Série1**

3

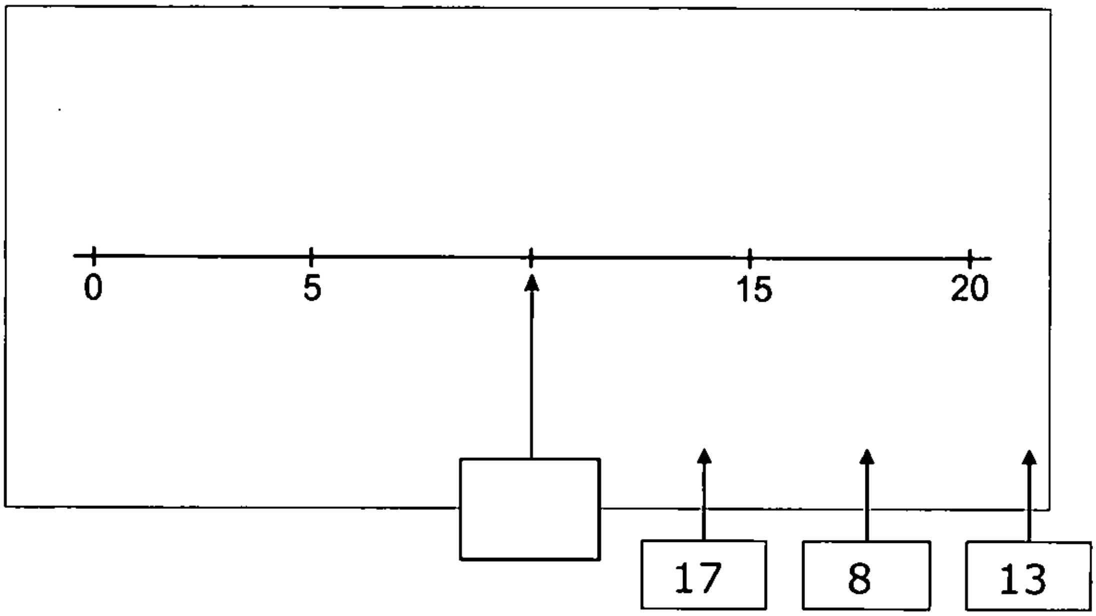


4

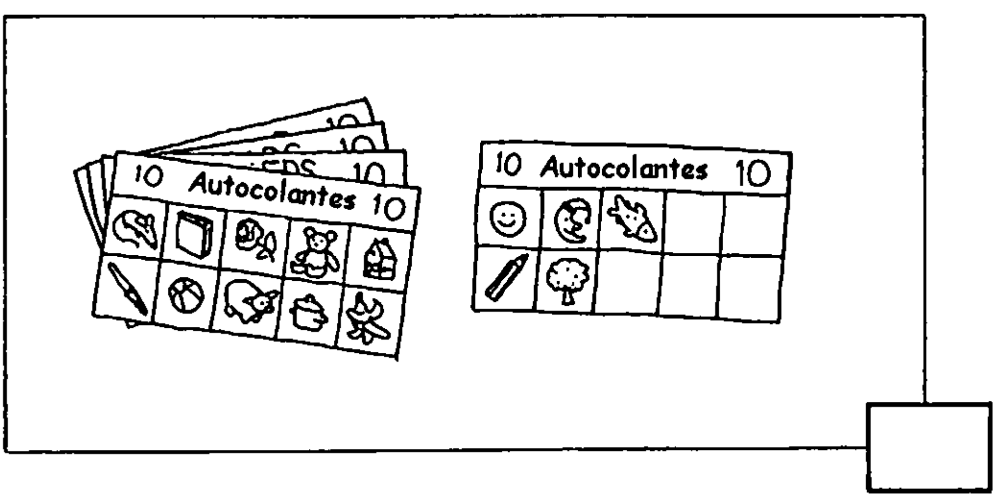
12 +  = 18

2B **Série2**

5

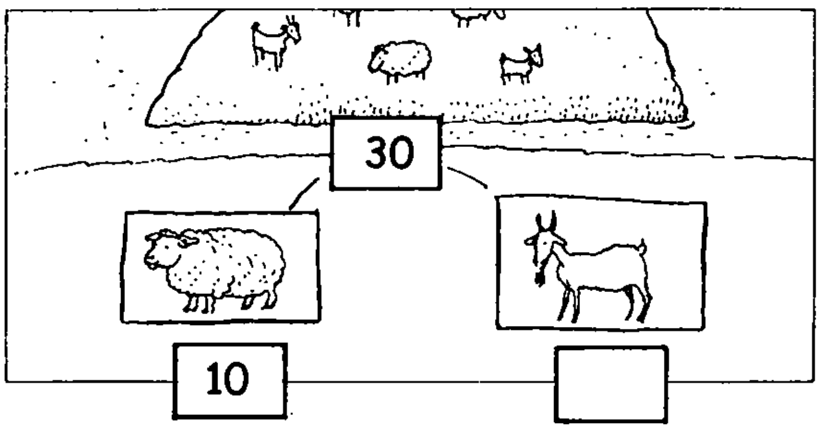


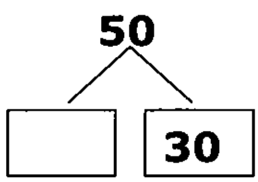
6

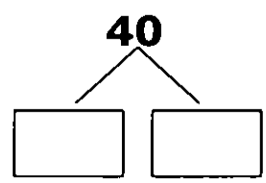


2B **Série2**

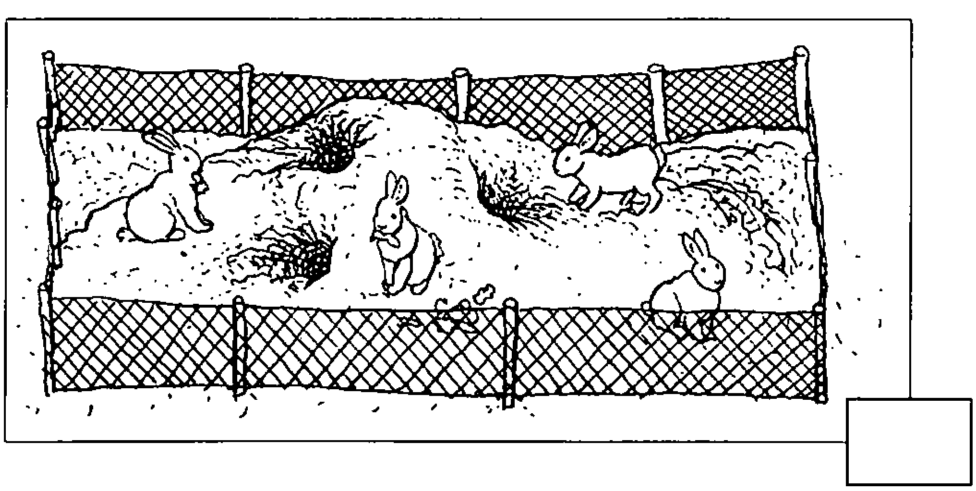
7







8



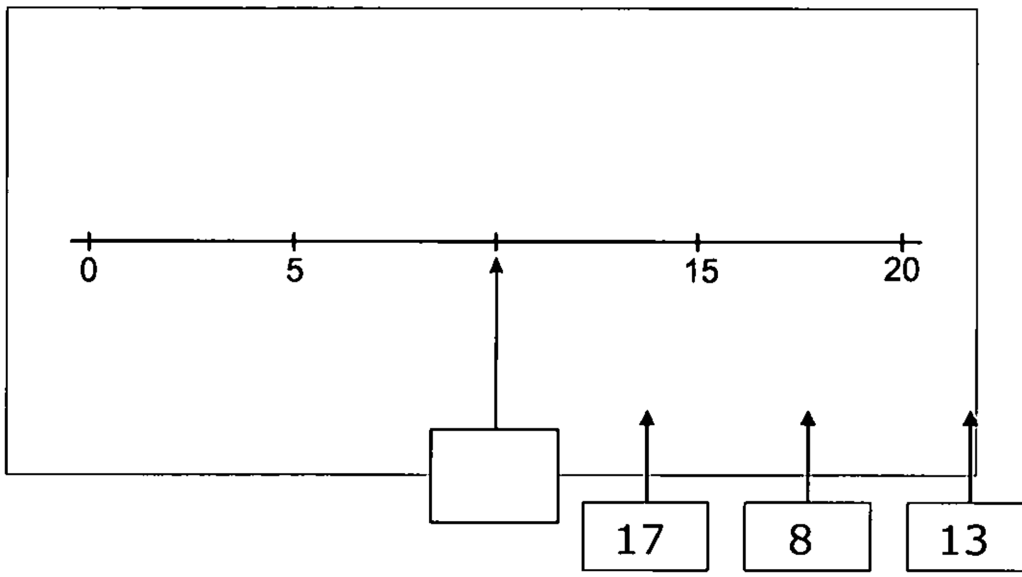
2 º Ano - M

Série2 + Série3[7]

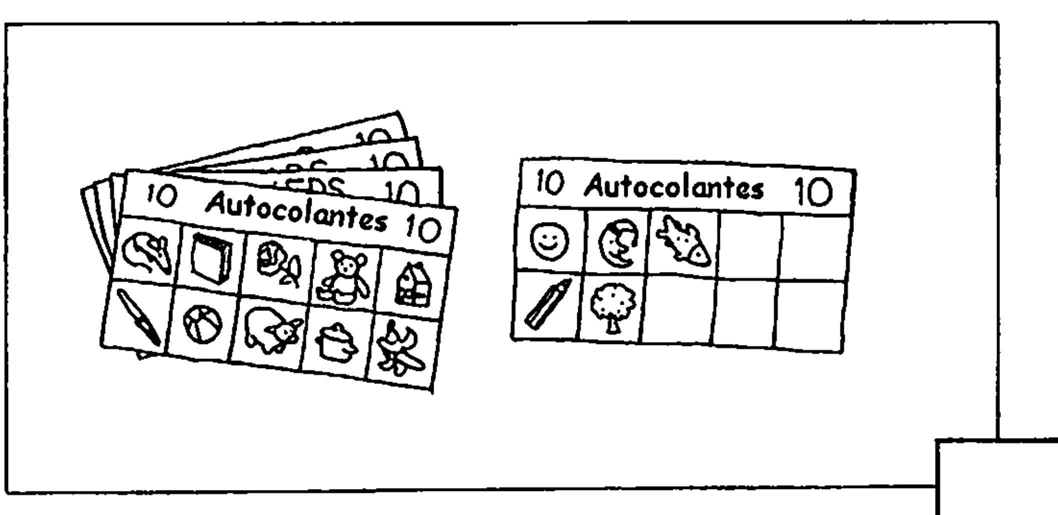
[7] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

2M **Série2**

<u>5</u>

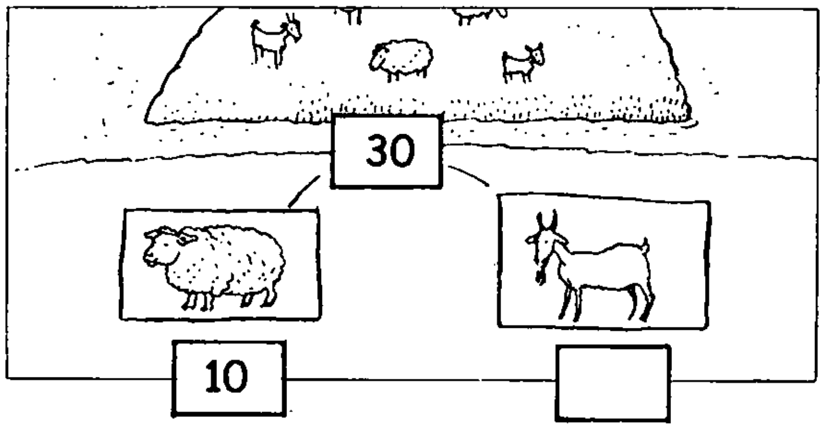


<u>6</u>



2M **Série2**

7

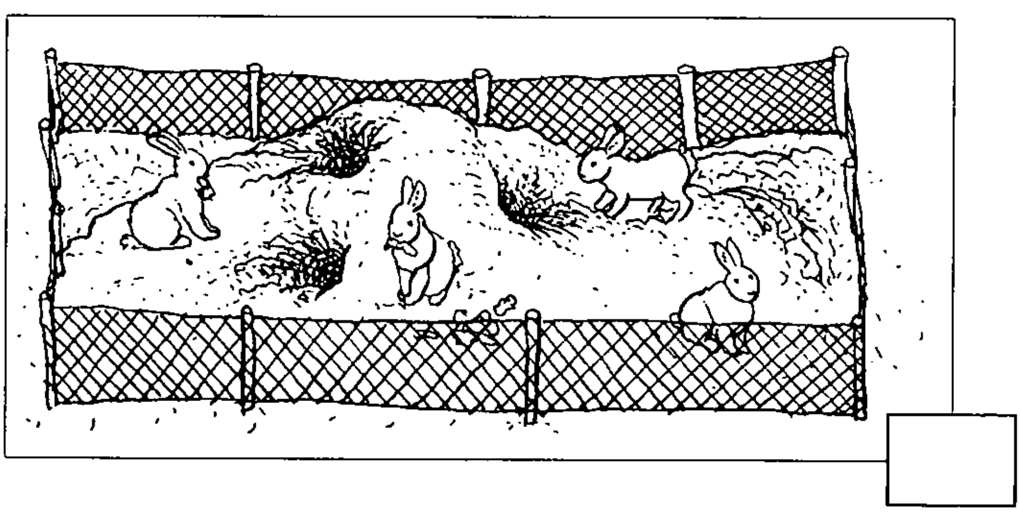


50

30

40

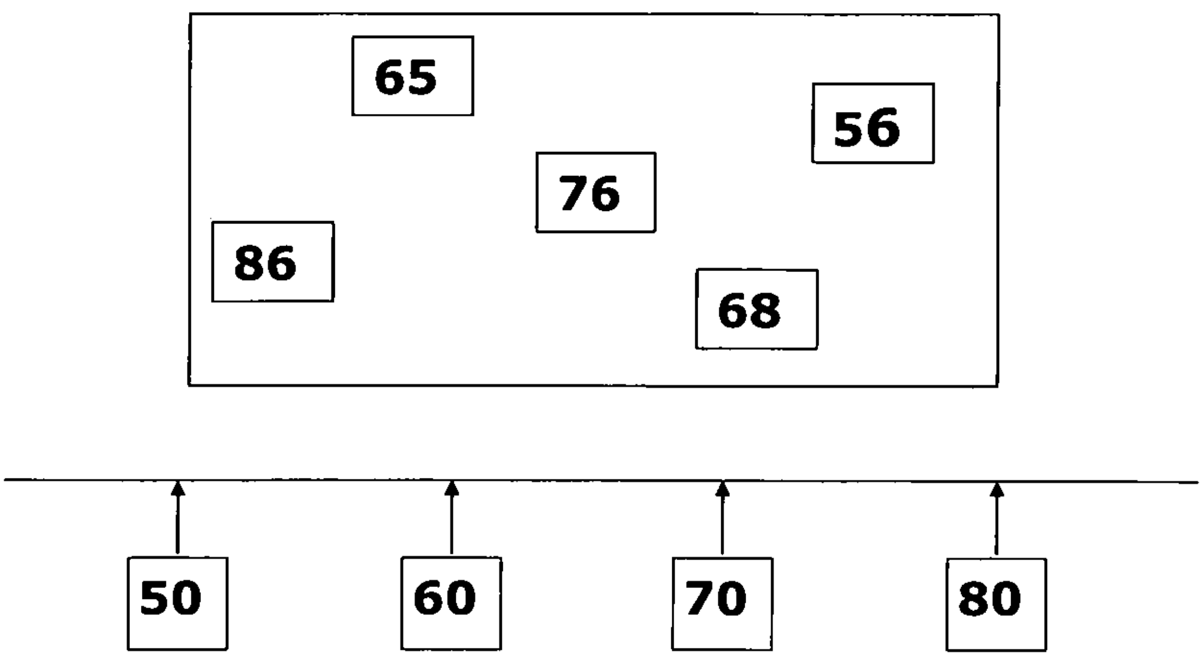
8



2M **Série3**

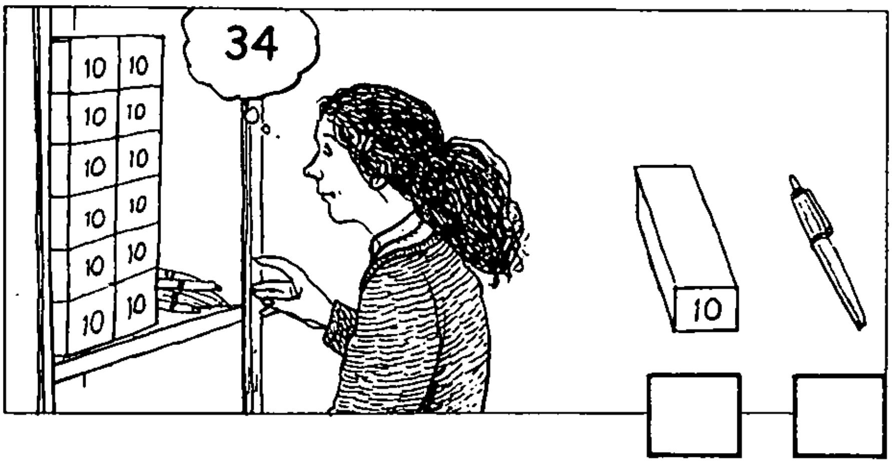
<u>**9**</u>

<u>**10**</u>



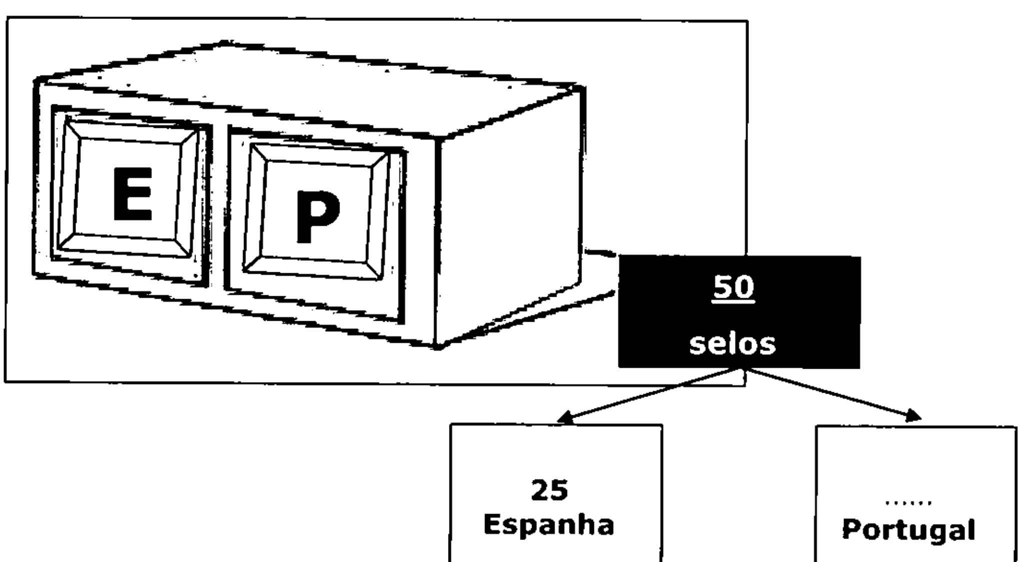
2M **Série3**

<u>11</u>



45
Canetas

<u>12</u>



2 º Ano - A

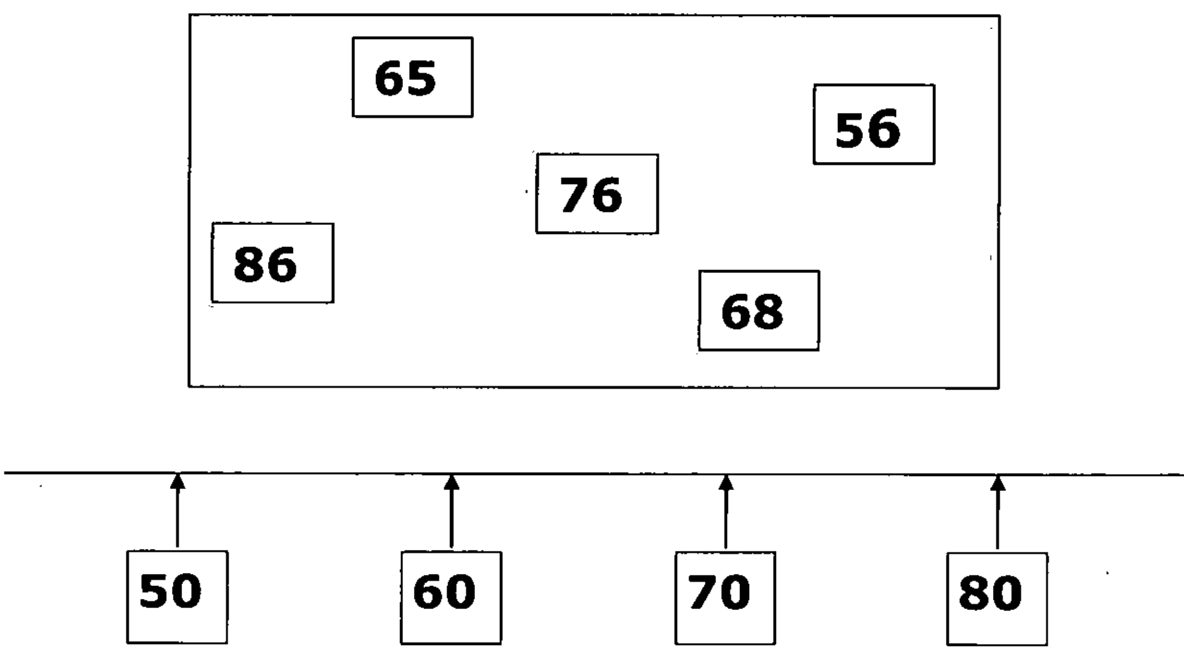
Série3 + Série4[8]

[8] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

2A **Série3**

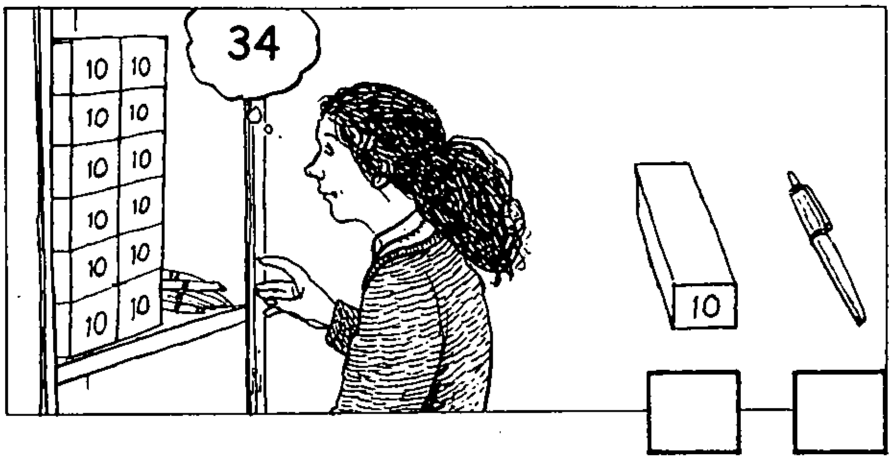
9

10



2A **Série3**

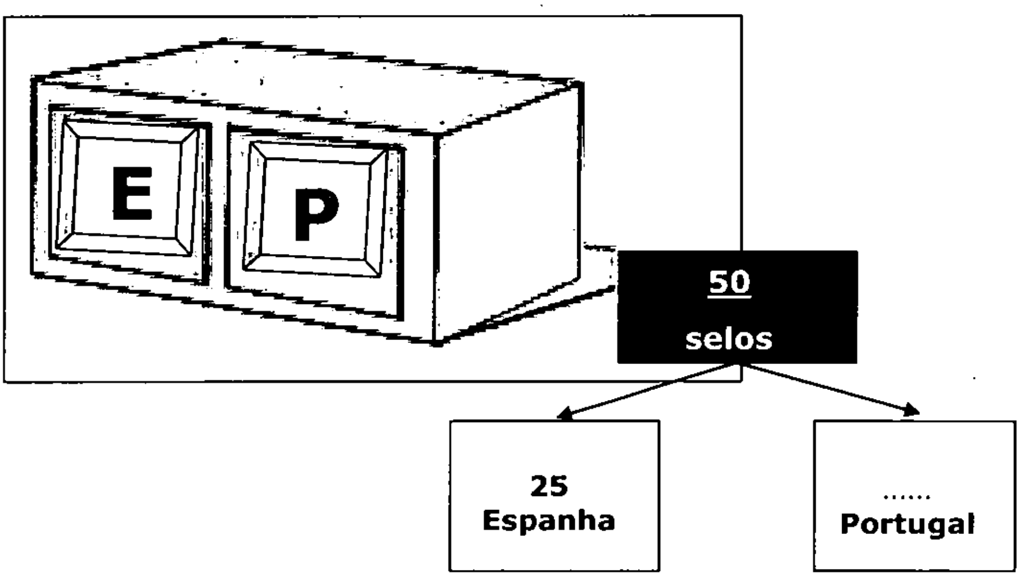
11



45

Canetas

12



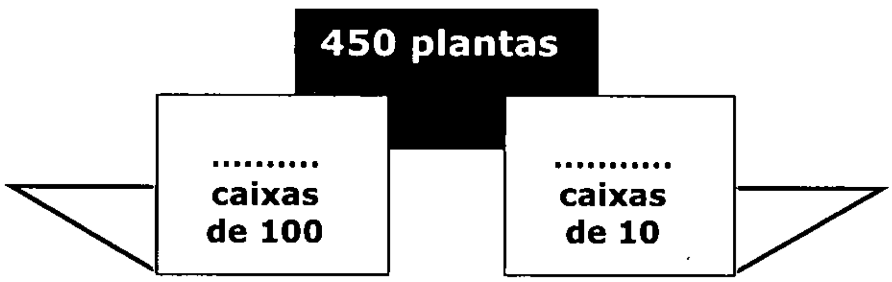
2A **Série4**

13

Ricardo quer meter 450 plantas em caixas de 100 e em caixas de 10.

Utiliza o maior número de caixas possível de 100.

Quantas caixas de 100 e quantas caixas de 10 precisa?



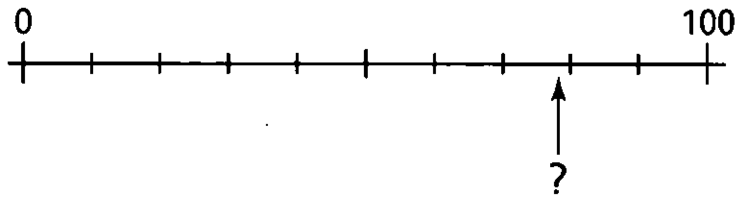
14

Estas calças agora estão mais baratas.

Quantos euros menos?

2A **Série4**

15



A seta mostra o lugar de um número.

Qual é o número?

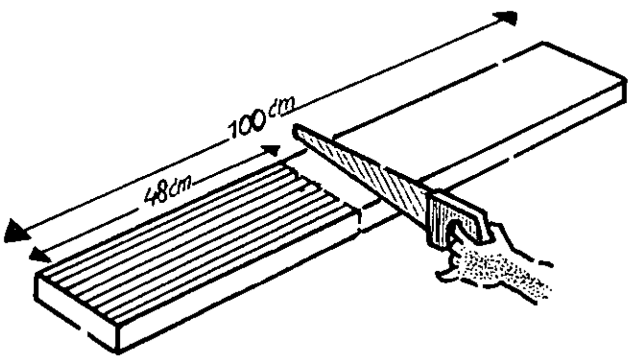
A 72

B 78

C 82

D 87

16



Serras uma tábua e uma parte fica com 48 centímetros.

Qual é o comprimento da outra parte?

3 º Ano - B

Série3 + Série4[9]

[9] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

3B **Série3**

9

Bernardo
18 anos

Sérgio
23 anos

10

65

56

76

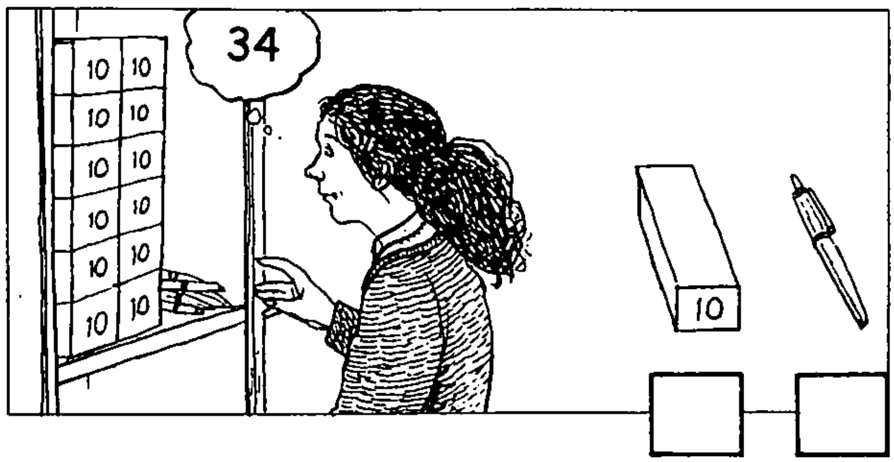
86

68

50 **60** **70** **80**

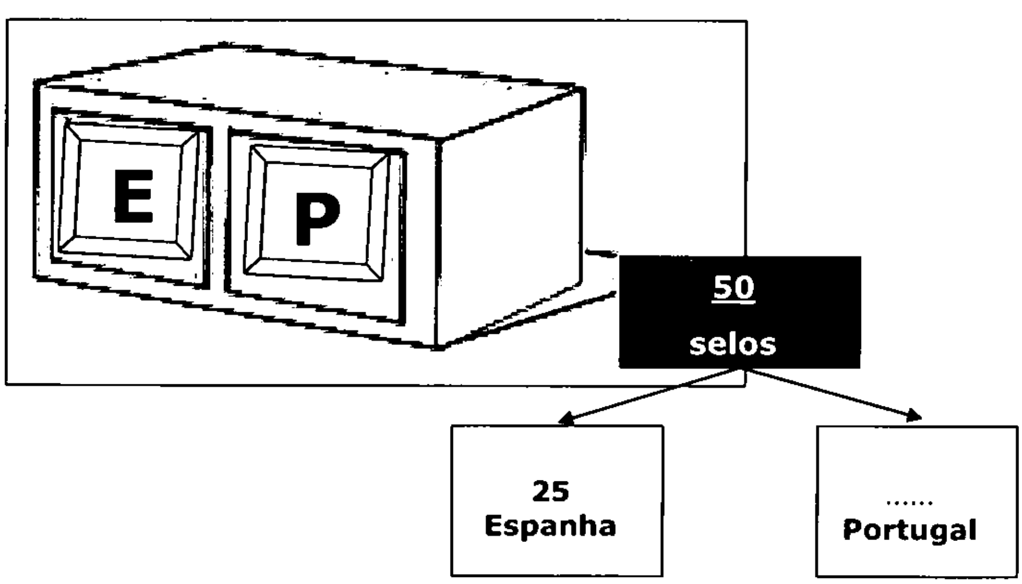
3B **Série3**

11



45
Canetas

12



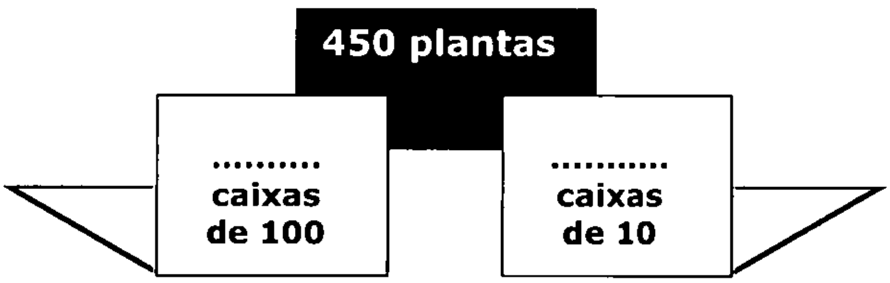
3B **Série4**

13

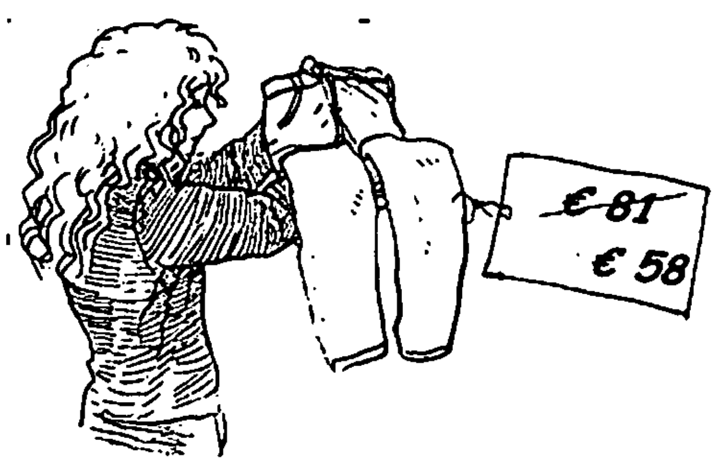
Ricardo quer meter 450 plantas em caixas de 100 e em caixas de 10.

Utiliza o maior número de caixas possível de 100.

Quantas caixas de 100 e quantas caixas de 10 precisa?



14

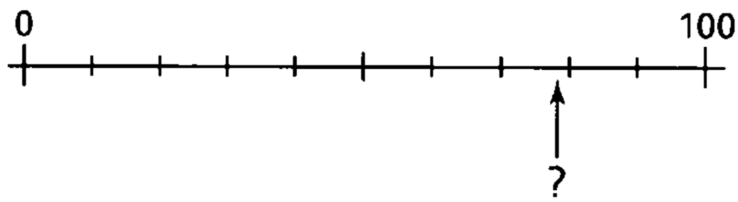


Estas calças agora estão mais baratas.

Quantos euros menos?

3B **Série4**

15



A seta mostra o lugar de um número.

Qual é o número?

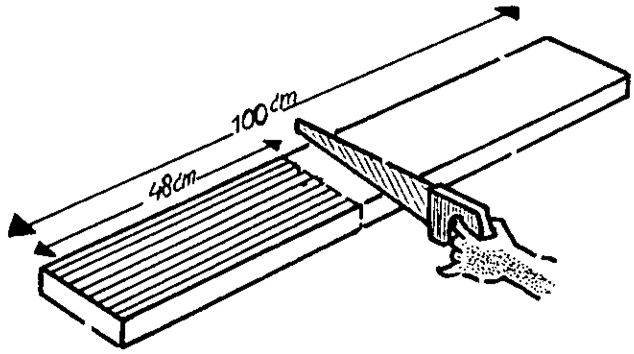
A 72

B 78

C 82

D 87

16



Serras uma tábua e uma parte fica com 48 centímetros.

Qual é o comprimento da outra parte?

3 º Ano - M

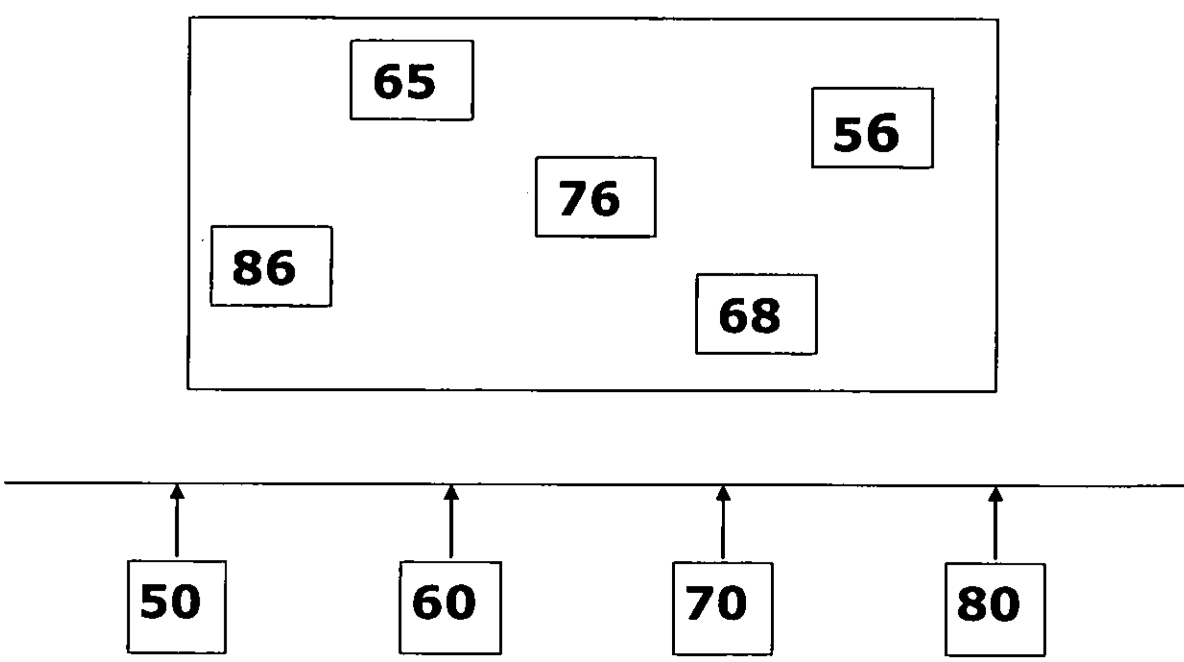
Série3 + Série4[10]

[10] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

3M **Série3**

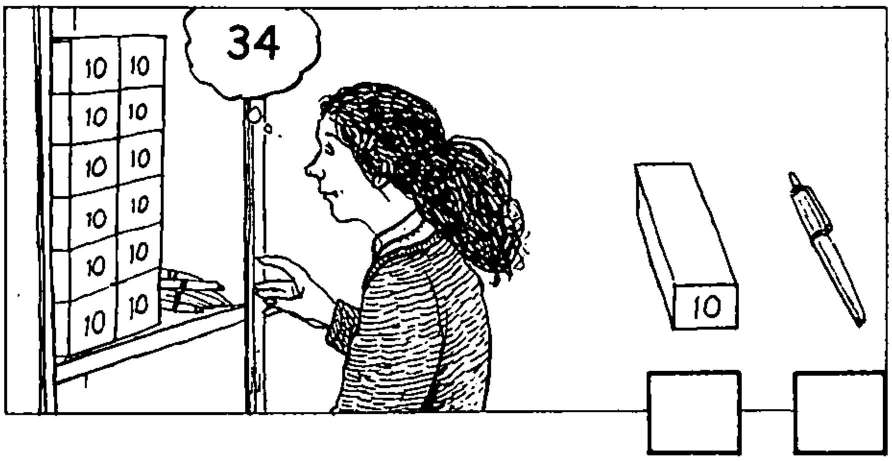
9

10



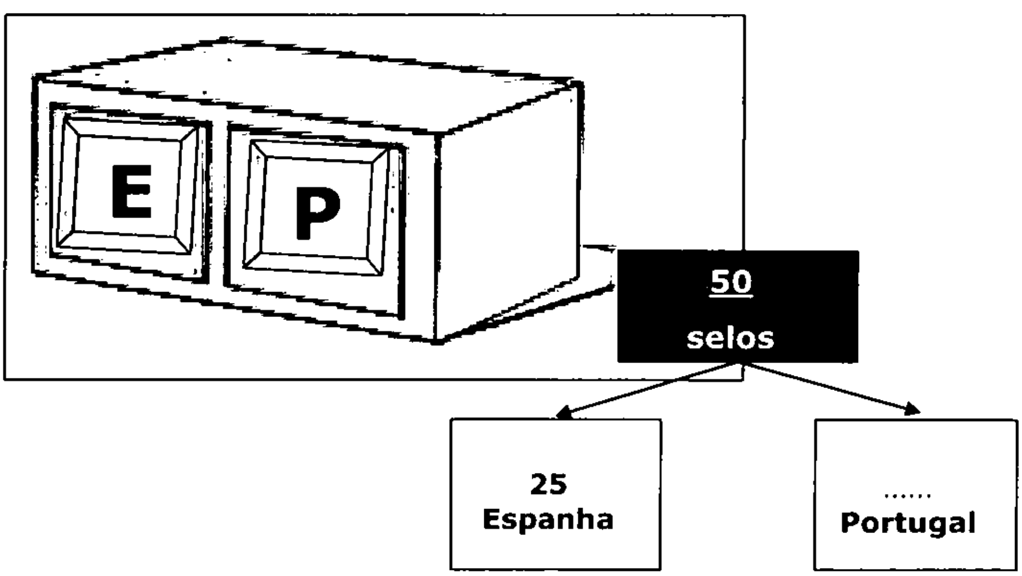
3M **Série3**

11



45
Canetas

12



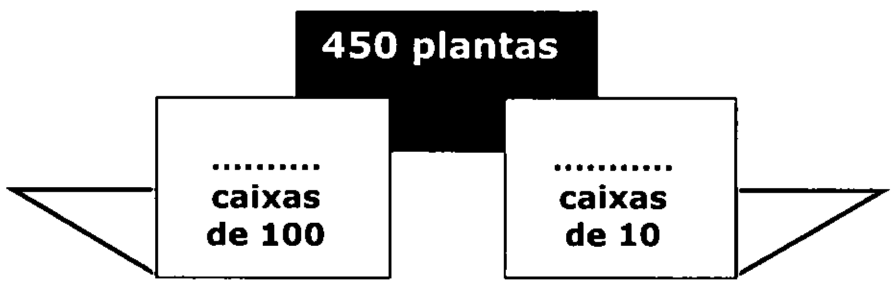
3M **Série4**

<u>**13**</u>

Ricardo quer meter 450 plantas em caixas de 100 e em caixas de 10.

Utiliza o maior número de caixas possível de 100.

Quantas caixas de 100 e quantas caixas de 10 precisa?



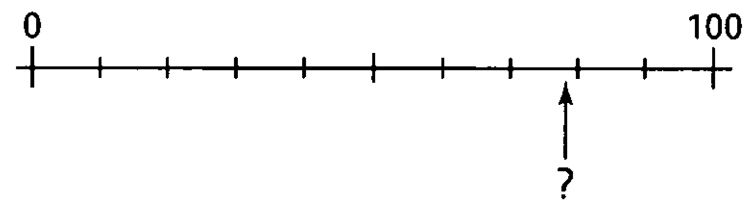
<u>**14**</u>

Estas calças agora estão mais baratas.

Quantos euros menos?

3M **Série4**

15



A seta mostra o lugar de um número.

Qual é o número?

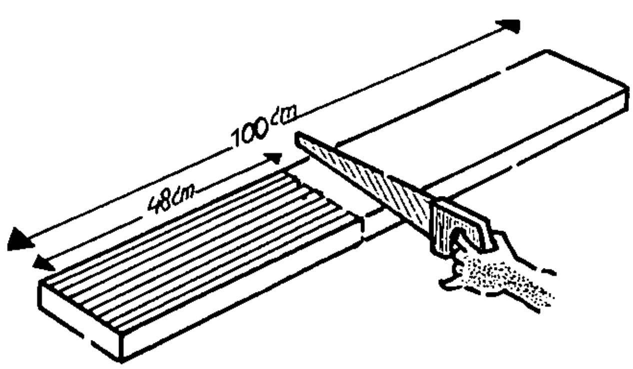
A 72

B 78

C 82

D 87

16



Serras uma tábua e uma parte fica com 48 centímetros.

Qual é o comprimento da outra parte?

3 º Ano - A

Série4 + Série5[11]

[11] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

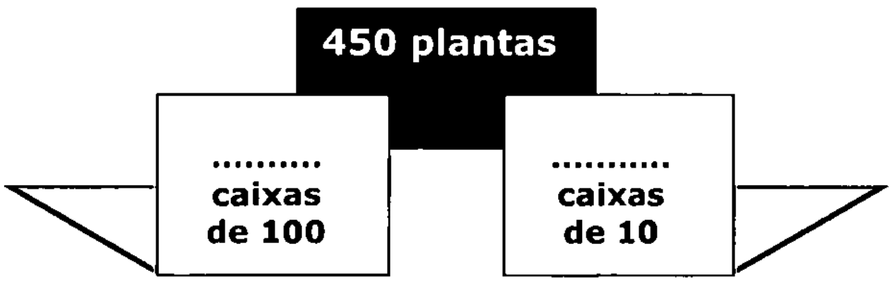
3A **Série4**

13

Ricardo quer meter 450 plantas em caixas de 100 e em caixas de 10.

Utiliza o maior número de caixas possível de 100.

Quantas caixas de 100 e quantas caixas de 10 precisa?



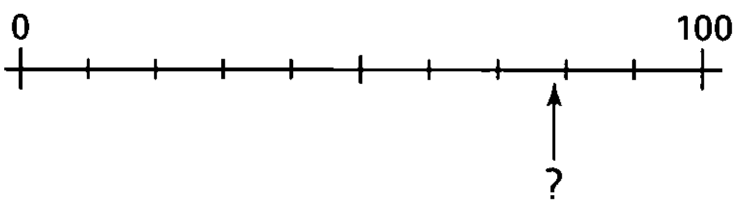
14

Estas calças agora estão mais baratas.

Quantos euros menos?

3A **Série4**

15



A seta mostra o lugar de um número.

Qual é o número?

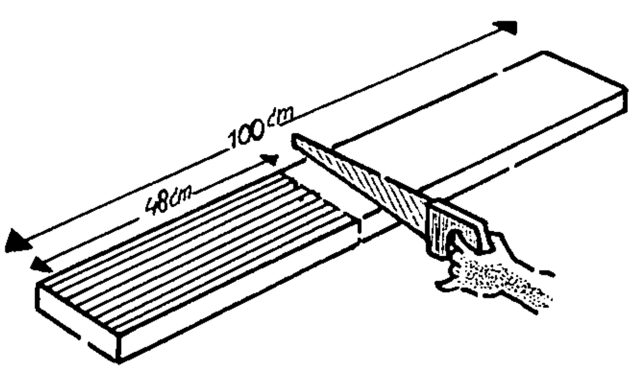
A 72

B 78

C 82

D 87

16

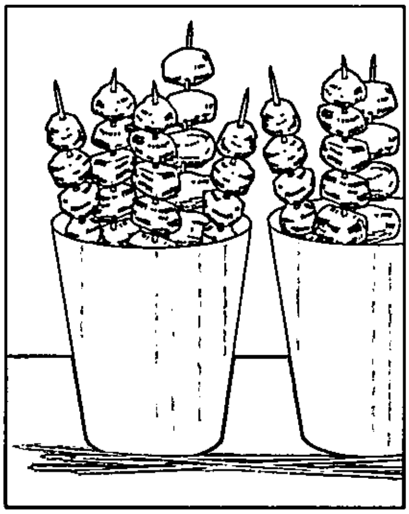


Serras uma tábua e uma parte fica com 48 centímetros.

Qual é o comprimento da outra parte?

3A **Série5**

17

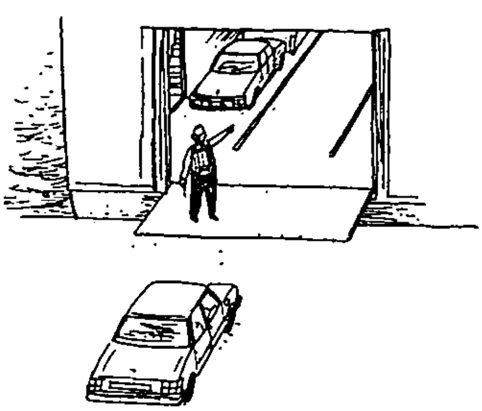


Queres fazer 24 espetadas.

Cada espetada tem 10 pedaços de carne.

Quantos pedaços de carne precisas?

18



Este ferry-boat pode transportar 250 automóveis. 189 já estão no ferry.

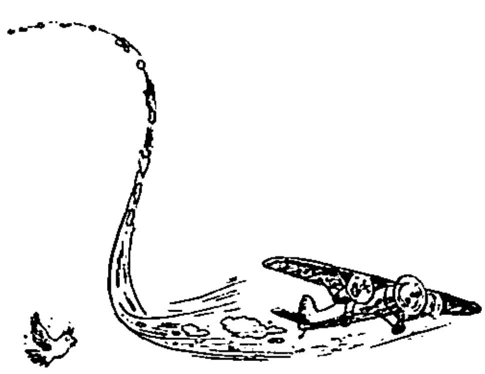
Quantos automóveis podem ainda entrar?

3A **Série5**

19

$62 - 48 =$ ________

20



O avião desce de uma altitude de 630 metros para 370 metros.

Voa quantos metros mais baixo?

4 º Ano - B

Série4 + Série5[12]

[12] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

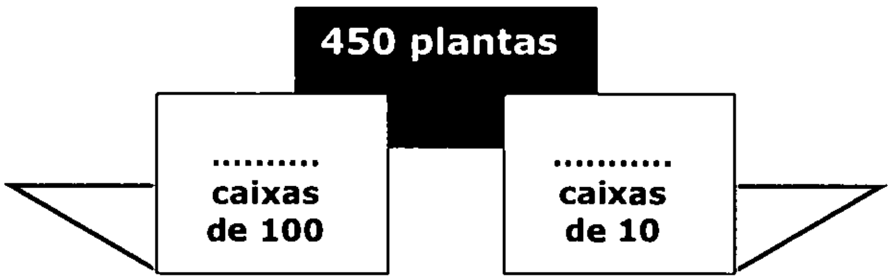
4B **Série4**

13

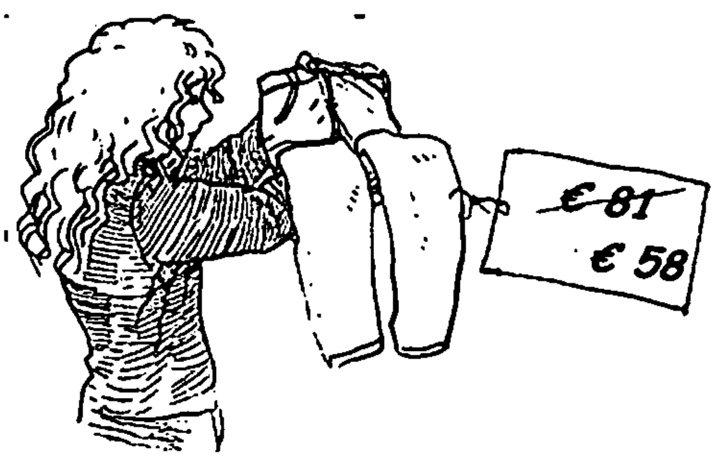
Ricardo quer meter 450 plantas em caixas de 100 e em caixas de 10.

Utiliza o maior número de caixas possível de 100.

Quantas caixas de 100 e quantas caixas de 10 precisa?



14

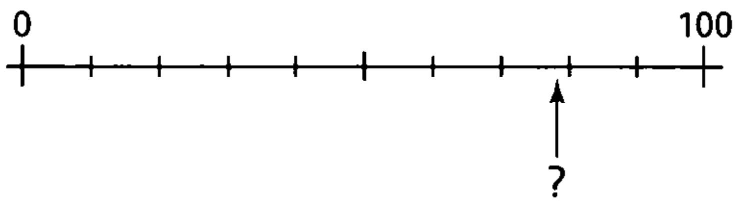


Estas calças agora estão mais baratas.

Quantos euros menos?

4B **Série4**

15



A seta mostra o lugar de um número.

Qual é o número?

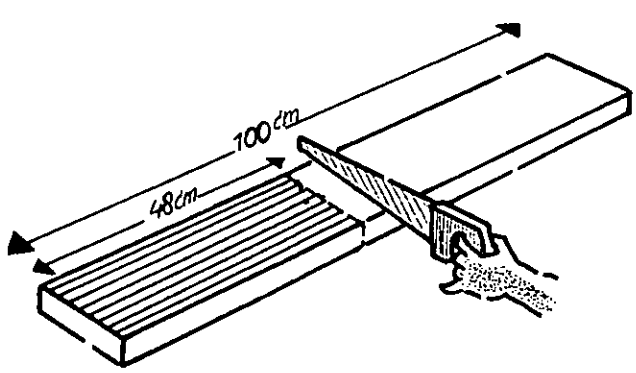
A 72

B 78

C 82

D 87

16

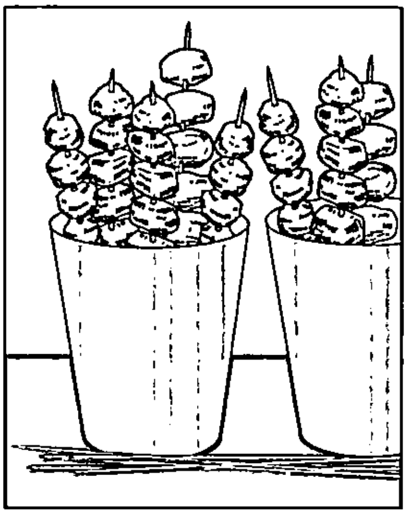


Serras uma tábua e uma parte fica com 48 centímetros.

Qual é o comprimento da outra parte?

4B **Série5**

17

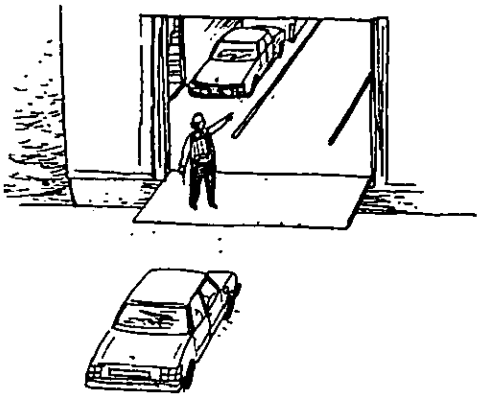


Queres fazer 24 espetadas.

Cada espetada tem 10 pedaços de carne.

Quantos pedaços de carne precisas?

18



Este ferry-boat pode transportar 250 automóveis. 189 já estão no ferry.

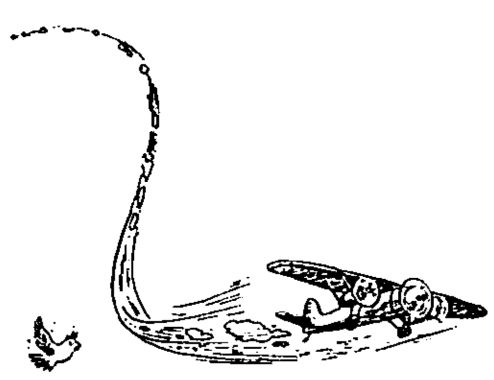
Quantos automóveis podem ainda entrar?

4B **Série5**

19

62 - 48 = ________

20



O avião desce de uma altitude de 630 metros para 370 metros.

Voa quantos metros mais baixo?

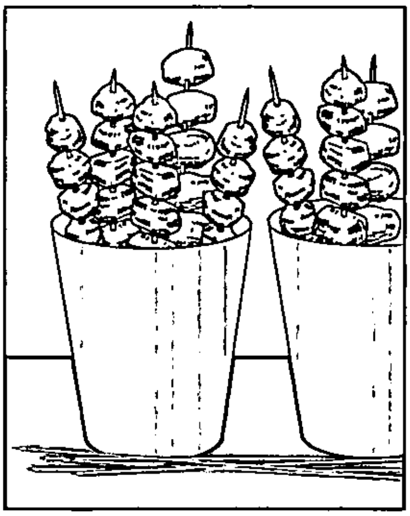
4º Ano - M

Série5 + Série6[13]

[13] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

4M **Série5**

17

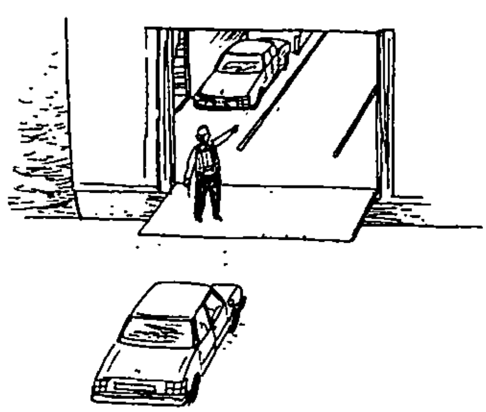


Queres fazer 24 espetadas.

Cada espetada tem 10 pedaços de carne.

Quantos pedaços de carne precisas?

18



Este ferry-boat pode transportar 250 automóveis. 189 já estão no ferry.

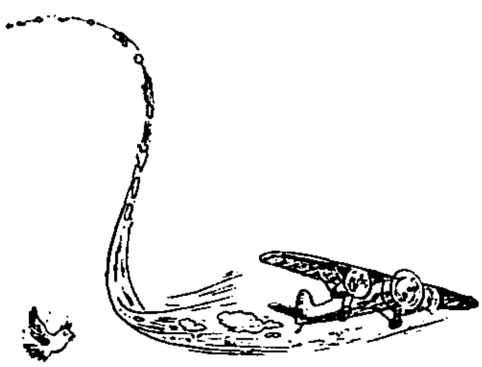
Quantos automóveis podem ainda entrar?

4M **Série5**

19

$62 - 48 =$ ________

20



O avião desce de uma altitude de 630 metros para 370 metros.

Voa quantos metros mais baixo?

4M **Série6**

<u>**21**</u>

Mário andou a poupar dinheiro para comprar uma boa bicicleta. Juntou 900 euros.

Comprou esta por 595 euros.

Quanto dinheiro, ainda tem o Mário para comprar o fato e os sapatos de ciclista?

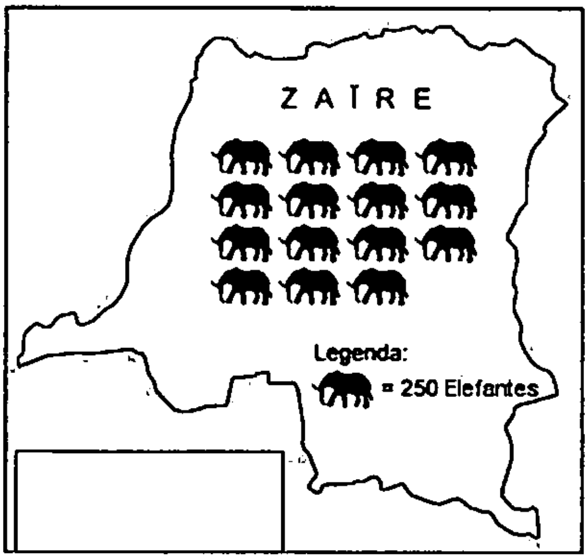
<u>**22**</u>

Clube desportivo do Barreiro
Piscina.................. 970 inscrições
Ginásio...................... 580 inscrições

O Clube desportivo recebeu menos inscrições para o ginásio que para a piscina.

Quantas menos?

23



No mapa podes ver quantos elefantes vivem no Zaire.

Escreve esse número no rectângulo.

24

998 +  = 1662

Que número representa a cara?
Escreve-o no rectângulo abaixo.

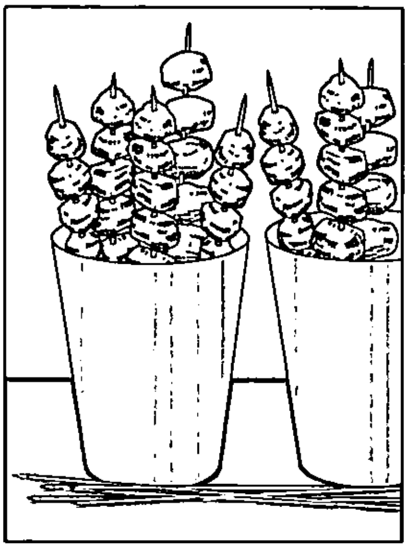
4º Ano - A

Série5 + Série6[14]

[14] Adaptado de: Kraemer, J.-M. (2008). *Leerling- en onderwijsvolgsysteem. Diagnosticeren en plannen in de onderbouw*. Arnhem:Cito

4A **Série5**

17

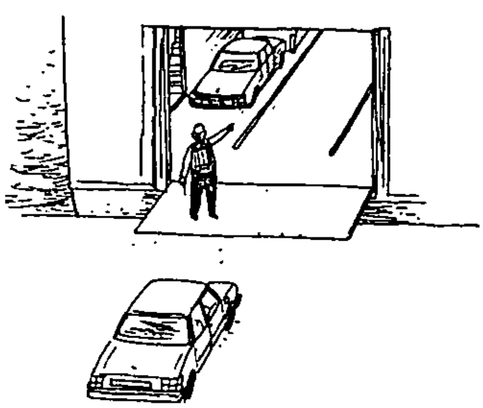


Queres fazer 24 espetadas.

Cada espetada tem 10 pedaços de carne.

Quantos pedaços de carne precisas?

18



Este ferry-boat pode transportar 250 automóveis. 189 já estão no ferry.

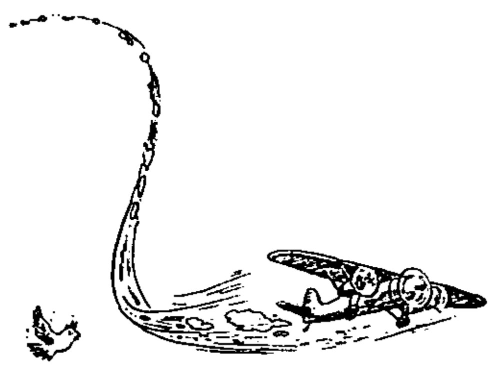
Quantos automóveis podem ainda entrar?

4A **Série5**

19

62 - 48 = ________

20



O avião desce de uma altitude de 630 metros para 370 metros.

Voa quantos metros mais baixo?

4A **Série6**

21

Mário andou a poupar dinheiro para comprar uma boa bicicleta. Juntou 900 euros.

Comprou esta por 595 euros.

Quanto dinheiro, ainda tem o Mário para comprar o fato e os sapatos de ciclista?

22

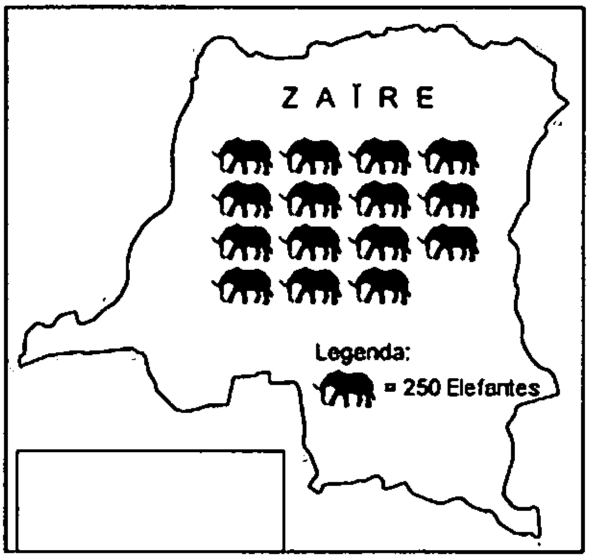
Clube desportivo do Barreiro
Piscina.................. 970 inscrições
Ginásio............... 580 inscrições

O Clube desportivo recebeu menos inscrições para o ginásio que para a piscina.

Quantas menos?

4A **Série6**

23



No mapa podes ver quantos elefantes vivem no Zaire.

Escreve esse número no rectângulo.

24

998 +  = 1662

Que número representa a cara?

Escreve-o no rectângulo abaixo.

Anexo 5

Quadro base para a organização de dados

Organização de dados

Pergunta	Nível	Registo escrito	Observado pela investigadora	Dito pelo aluno	Estratégias / Procedimentos	Acertou /errou/n respd.
1 Subtracção (10-6)	2B1					
	2B2					
2 Conheci/ dos números (15=5+?)e (18=10+?)	2B1					
	2B2					
3 Conheci/ dos números (22-18) e (17-14)	2B1					
	2B2					